

Alcuni limiti nelle prove dell'Esame di Stato

1) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Sessione Ordinaria, anno 2001, Quesito n.9

Test Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando $x \rightarrow +\infty$

- a) È uguale a zero
- b) È uguale a 1
- c) È un valore diverso dai due precedenti
- d) Non è determinato

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

La funzione al numeratore è limitata e risulta $\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ per cui sussiste la

$$\text{disuguaglianza } |\sin x - \cos x| = \sqrt{2} \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \sqrt{2}.$$

Possiamo considerare il modulo della funzione in esame e maggiorarlo:

$$\left| \frac{\sin x - \cos x}{x} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{|x|}$$

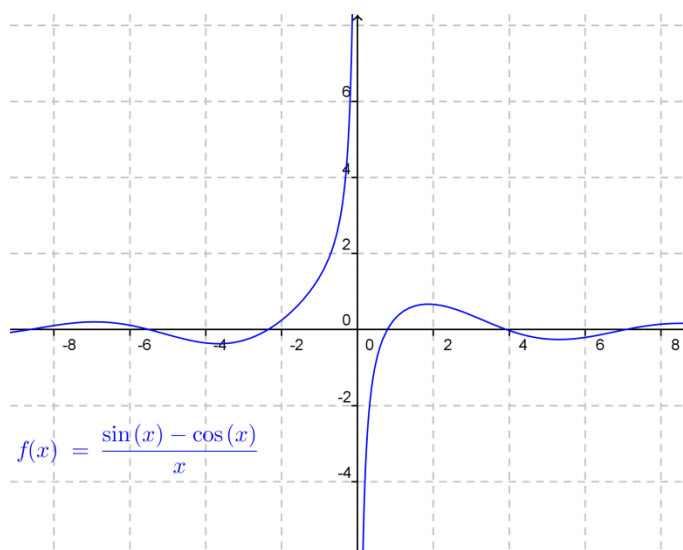
Poiché sussiste il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{|x|} = 0, \text{ per il teorema del confronto}$$

per due funzioni deduciamo che risulta

$$\text{anche } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin x - \cos x}{x} \right| = 0 \text{ e ciò}$$

$$\text{implica che } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \cos x}{x} = 0.$$



La **risposta corretta** tra quelle proposte è la **a**).

2) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva, 2005, quesito 4.

Si consideri la seguente equazione in x :

$$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0, \text{ dove } k \text{ è un parametro reale diverso da } 2.$$

Indicate con x' , x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

Risoluzione

Ricordiamo che la somma delle radici dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ vale

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ quindi nel caso in esame risulta}$$

$$x' + x'' = \frac{2k-1}{k-2}.$$

Studio dei tre limiti

3.1) $\lim_{k \rightarrow 2} \frac{2k-1}{k-2} = \frac{3}{0}$, il limite non esiste perché i due limiti laterali esistono e sono diversi tra loro.

Infatti risulta

$$\lim_{k \rightarrow 2^-} \frac{2k-1}{k-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{k \rightarrow 2^+} \frac{2k-1}{k-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

$$3.2) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k-1}{k-2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{k-2} \right) = 2 + 0^+ = 2^+$$

$$3.3) \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{2k-1}{k-2} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{k-2} \right) = 2 + 0^- = 2^-$$

3) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione Straordinaria, 2007, quesito n.6

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Se ne studi la continuità nel punto $x=0$.

Risoluzione

La funzione è definita su tutto l'asse reale $\mathbb{R}$. Poiché $f(0)=0$, la funzione nel punto $x=0$ sarà continua se e solo se il limite in detto punto esisterà e varrà zero. Proviamo che effettivamente la funzione è continua in $x=0$ (e in definitiva che è continua in tutto il dominio di definizione).

Proveremo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ sfruttando il teorema del confronto per tre funzioni (conosciuto anche come **teorema dei carabinieri**).

In relazione alla funzione in oggetto $\forall x \neq 0$ si verifica che:

$$\text{I.} \quad \left| \sin^2 x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = \left| \sin^2 x \right| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|;$$

$$\text{II.} \quad \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1, \text{ quindi anche } \left| \sin^2 x \right| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \left| \sin^2 x \right|;$$

III. sussiste la doppia disuguaglianza

$$0 \leq \left| \sin^2 x \right| \cdot \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq \left| \sin^2 x \right|$$

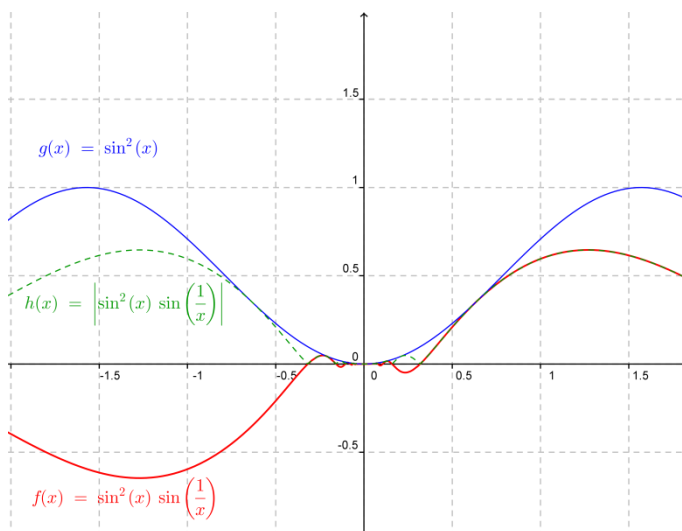
IV. la funzione costante $f_1(x) = 0$ e la funzione $f_2(x) = \left| \sin^2 x \right|$ ammettono limite per $x \rightarrow 0$ e i due limiti valgono 0.

Queste circostanze implicano che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \sin^2 x \right| \cdot \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| = 0, \text{ cioè che}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0 \text{ e ciò implica anche che}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$



C.V.D.

4) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione Straordinaria, 2007, quesito n.8

Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \frac{ax^2 + 6}{bx + 3}$ perché la curva rappresentativa ammetta un asintoto obliquo d'equazione $y = x + 3$.

Risoluzione

Ricordiamo che quando il diagramma della funzione $y = f(x)$ ammette un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ per $x \rightarrow +\infty$, il coefficiente angolare m , numero reale diverso da zero, è il risultato del seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \text{ invece il valore del termine}$$

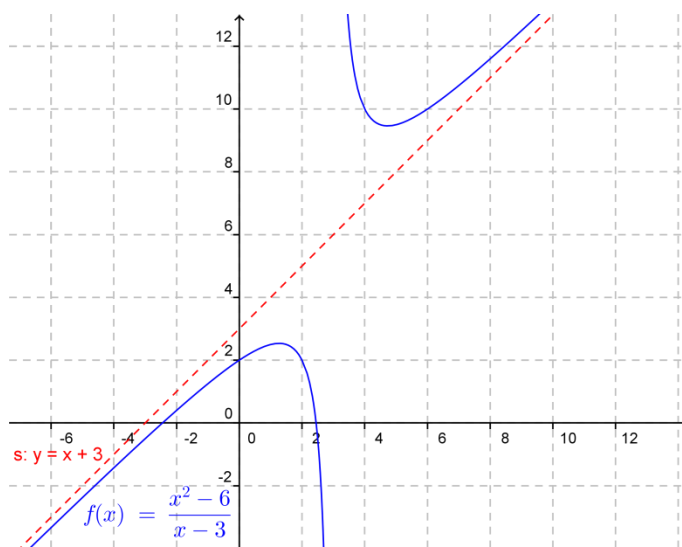
noto q , numero reale, è il risultato del seguente limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$.

Analoghe relazioni sussistono se l'asintoto obliquo al diagramma della funzione $y = f(x)$ si presenta per $x \rightarrow -\infty$.

Ciò premesso, sappiamo che dovrà risultare $m=1$, $q=3$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + 6}{x(bx + 3)} = \frac{a}{b} = 1, \text{ da cui } a=b; \text{ la}$$

funzione ha allora la seguente espressione $y = f(x) = \frac{ax^2 + 6}{ax + 3}$.



Passando al termine noto q deve risultare

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{ax^2 + 6}{ax + 3} - 1x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-3x + 6}{ax + 3} \right] = \frac{-3}{a} = 3, \text{ da cui } a = -1.$$

Concludiamo che la funzione in esame è: $y = \frac{6 - x^2}{3 - x} \rightarrow y = \frac{x^2 - 6}{x - 3}$

5) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, anno 2008, Sessione Ordinaria, Quesito n.9

Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$; esiste il $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

Risoluzione

Proviamo che il limite non esiste.

Notiamo che la funzione è definita in $\mathbb{R} - \{1\}$ e la sua esplicitazione è la seguente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{-(x - 1)} = -x - 1 & \text{per } x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{(x - 1)} = x + 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

Poiché il punto $x=1$ è di accumulazione a sinistra e a destra e l'espressione algebrica della funzione cambia passando da sinistra a destra del punto, lo studio del limite in esame va eseguito affrontando lo studio dei limiti laterali. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x - 1) = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

Poiché i due limiti laterali esistono e sono diversi tra loro si conclude che il limite in oggetto non esiste. In particolare, avendo ottenuto valori finiti per i due limiti possiamo affermare che **la funzione nel punto $x=1$ presenta una discontinuità di prima specie con salto $\sigma=4$.**

6) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione Suppletiva, anno 2008, quesito n.3

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Risoluzione

Osserviamo subito che la funzione in esame è definita su tutto l'asse reale. Infatti, $\forall x \in \mathbb{R}$ è verificata la disuguaglianza stretta $x^2 + 2x + 2 > 0$ perché risulta $\frac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 < 0$.

Studiamo i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1 - x = \infty - \infty$ (forma indeterminata)

Si affronta lo studio razionalizzando l'espressione.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1 - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1 - x)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (1 - x))}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (1 - x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2 - (1 - x)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (1 - x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - \frac{1}{x} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - \frac{1}{x} + 1} = 2 \end{aligned}$$

Avendo ottenuto per il limite un valore finito si conclude che il diagramma della funzione per $x \rightarrow +\infty$ ammette come asintoto orizzontale la retta $s_1: y=2$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + 1 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 - x =$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \frac{1}{x} - 1\right) = -\infty \cdot (-1 - 1) = +\infty.$

Avendo ottenuto per il limite valore infinito si può affermare che per $x \rightarrow -\infty$ il diagramma della funzione non ammette asintoto orizzontale e la ricerca continua per determinare l'eventuale asintoto obliquo. Si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \frac{1}{x} - 1\right)}{x} = -2$$

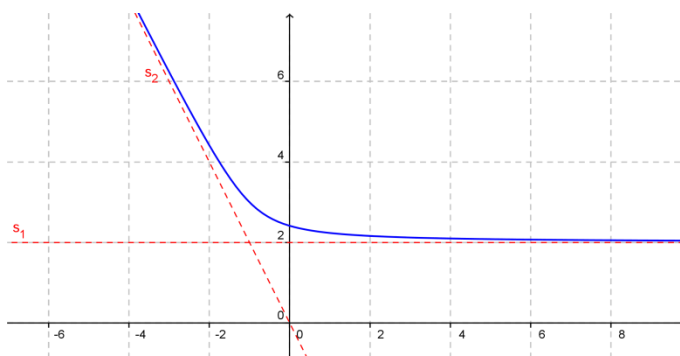
Con $m=-2$ si studia ora il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1 + x] = \infty - \infty \text{ Forma indeterminata.}$$

Si procede con la razionalizzazione dell'espressione.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1 + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1 + x)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (1 + x))}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (1 + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 2x + 2) - (1 + x)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (1 + x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (1 + x)} = \frac{1}{+\infty - (-\infty)} = 0 \end{aligned}$$

Conclusione - Per $x \rightarrow -\infty$ il diagramma della funzione ammette come asintoto obliquo la retta $s_2: y = -2x$.



7) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione Ordinaria, anno 2013, quesito n.8

Si mostri, senza utilizzare il teorema di l'Hôpital, che:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} = -1$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Infatti, dalla continuità delle funzioni $e^{\operatorname{sen} x}$ e $x - \pi$ segue $\lim_{x \rightarrow \pi} e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} \pi} = e^0 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow \pi} x - \pi = \pi - \pi = 0$, per cui

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Ciò premesso, possiamo studiare il limite in esame operando una sostituzione di variabile. Poniamo $x - \pi = t$ ed osserviamo che se $x \rightarrow \pi$ allora $t \rightarrow 0$. Il limite assume la seguente forma

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(t+\pi)} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{t},$$

per ottenere la quale è stata sfruttata la nota relazione tra gli archi associati $\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Il limite ottenuto si affronta moltiplicando e dividendo l'espressione per $-\operatorname{sen} t$.

Si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{t} \cdot \frac{-\operatorname{sen} t}{-\operatorname{sen} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{-\operatorname{sen} t} \cdot \frac{-\operatorname{sen} t}{t} \quad (*)$$

A questo punto ricordiamo che sussistono i due limiti notevoli

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1,$$

per il secondo dei quali y deve essere espresso in radianti. Poiché i valori dei due limiti l_1, l_2 dei due fattori in cui è scomposta la funzione esistono e sono due numeri reali, per il teorema sul limite del prodotto di due funzioni possiamo scrivere

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{-\operatorname{sen} t} \cdot \frac{-\operatorname{sen} t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{-\operatorname{sen} t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} t}{t} = 1 \cdot (-1) = -1$$