

Una funzione definita per casi

Derivabilità e calcolo integrale

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x & \text{per } x < 0 \\ kxe^{-x} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

Quesiti

- 1) Riconosciuto che la funzione è continua in $\mathbb{R}$, determinare il valore del parametro k per il quale la funzione è anche derivabile in ogni punto del dominio.
- 2) Della funzione ottenuta precisare il segno e gli zeri, la monotonia e gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo o assoluto. Studiare la concavità e determinare i punti di flesso. Rappresentare il diagramma.
- 3) Studiare il limite $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h f(x) dx$ e precisare cosa rappresenta il suo valore.

Elaborazioni

- 1) La funzione, definita per casi, esiste per ogni x reale ed è continua in ogni punto del dominio, in particolare risulta $f(0)=0$. La funzione derivata prima è così definita

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{per } x < 0 \\ ke^{-x}(1-x) & \text{per } x > 0 \end{cases}, \text{ dunque nel punto } x=0 \text{ risulta}$$

$$f'_-(0) = -3, \quad f'_+(0) = k; \text{ la funzione è derivabile anche nel punto } x=0 \text{ se e solo se } k=-3.$$

La funzione per essere derivabile in tutto il suo dominio deve essere così definita:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x & \text{per } x < 0 \\ -3xe^{-x} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

2) Segno e zeri

La funzione si annulla nei punti $x_1=-3, x_2=0$.

Risulta $f(x)>0$ per $-3<x<0$; $f(x)<0$ per $(x<-3) \vee (x>0)$.

Monotonia

La funzione derivata prima è $f'(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{per } x < 0 \\ -3e^{-x}(1-x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ che si annulla nei punti

$$x_3 = -\frac{3}{2}, \quad x_4 = 1.$$

Segno della derivata prima

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad \left(x < -\frac{3}{2}\right) \vee (x > 1);$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad \left(-\frac{3}{2} < x < 1\right).$$

La funzione è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$, $\left]1; \infty\right[$ e strettamente

decrescente nell'intervallo $\left]-\frac{3}{2}; 1\right[$, nel punto $x_3 = -\frac{3}{2}$ presenta il **massimo assoluto** con

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \text{ e nel punto } x_4 = 1 \text{ presenta un minimo relativo con } f(1) = -3e^{-1}.$$

La funzione derivata seconda è così definita

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{per } x < 0 \\ -3e^{-x}(x-2) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

La derivata seconda non esiste nel punto $x=0$, è positiva per $(0 < x < 2)$, dove il diagramma della funzione volge la concavità verso l'alto, è negativa per $(x < 0) \vee (x > 2)$, dove la concavità è rivolta verso il basso.

Punti di flesso

Sono punti di flesso $x=2$, dove si annulla la derivata seconda, ma è anche punto di flesso $x=0$ perché nel punto $(0; f(0))$ esiste la retta tangente al diagramma della funzione, che è la retta $y=-3x$, e questa attraversa il diagramma stesso.

- 3) Il simbolo $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h f(x) dx$, con $h > 0$, sta ad indicare il limite cui tende il valore dell'integrale definito della funzione relativamente all'intervallo $[0; h]$, per $h \rightarrow +\infty$. Considerato che nell'intervallo $]0; +\infty[$ la funzione in esame è negativa, il valore dell'integrale definito $\int_0^h f(x) dx$ è negativo ed il limite in oggetto potrebbe essere finito o uguale a $-\infty$, ma certamente il limite esiste.

L'integrale definito da calcolare si affronta integrando per parti. Risulta

$$\begin{aligned} \int_0^h f(x) dx &= \int_0^h -3xe^{-x} dx = 3 \int_0^h x(-e^{-x}) dx = 3 \int_0^h x D(e^{-x}) dx = 3 \left\{ [xe^{-x}]_0^h - \int_0^h e^{-x} dx \right\} = \\ &= 3 \left\{ [he^{-h} - 0] + [e^{-x}]_0^h \right\} = 3 \left(he^{-h} + (e^{-h} - 1) \right) = 3e^{-h}(h+1) - 3 \end{aligned}$$

Studio del limite

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} [3e^{-h}(h+1) - 3] = \lim_{h \rightarrow +\infty} 3 \cdot \frac{h+1}{e^h} - 3 = \dots = -3$$

Conclusione

L'integrale è convergente. L'area della regione piana illimitata compresa tra il semiasse positivo delle ascisse e il diagramma della funzione vale 3.

