

Esercitazione sui limiti della forma $\frac{0}{0}$ con i limiti notevoli⁽¹⁾

Per ogni esercizio è riportato l'indicatore Liv_x che ne indica il livello di difficoltà, con $1 \leq x \leq 5$; Liv_1 indica il livello di difficoltà più basso, Liv_5 indica il livello di difficoltà più alto.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x + \tan(4x)} =$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\frac{x}{x} + \frac{\tan(4x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}}{1 + 4 \cdot \frac{\tan(4x)}{4x}} = \frac{3 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}}{1 + 4 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tan z}{z}} = \frac{3 \cdot 1}{1 + 4 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

Nota_1

Si ricordino i limiti notevoli

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} = 1,$$

con y espresso in radianti.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(3x)}{4x + \sin(2x)} =$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\tan(3x)}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{\sin(2x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 3 \cdot \frac{\tan(3x)}{3x}}{4 + 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x}} = \frac{1 - 3 \cdot 1}{4 + 2 \cdot 1} = -\frac{1}{3}$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x} =$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cdot \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

Nota_2

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \sin(2x)} =$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi x} =$ (Liv_2)

Per studiare il limite effettuiamo il cambio di variabile ponendo $x - \pi = t$ da cui $x = \pi + t$ e da $x \rightarrow \pi$ segue $t \rightarrow 0$. Procediamo con il calcolo.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{(\pi + t)^2 - \pi(\pi + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(t)}{t^2 + \pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(t)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t + \pi} = -1 \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

Nota_3

Si ricordi la relazione notevole

$$\sin(\pi + t) = -\sin(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(2x - \pi)^2} =$ (Liv_2)

Cambiamo la variabile ponendo $x - \frac{\pi}{2} = t$, da cui $x = \frac{\pi}{2} + t$ e da $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ segue $t \rightarrow 0$.

Nota_4

Si ricordi la relazione notevole

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

¹ Si ricorda che i simboli $\log x$, $\log(x)$ indicano il logaritmo naturale del numero reale x e la base del logaritmo è il numero di Nepero $e=2,71828182845...$. Nella letteratura matematica il valore numerico logaritmo naturale di $x>0$ è indicato anche con uno dei seguenti simboli $\ln x$, $\ln(x)$. Quando si considera il logaritmo di un numero reale positivo in una base diversa questa va espressamente indicata.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{\left(2\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \pi\right)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{4t^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x}{\tan x - 1} =$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x (\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} \cdot \cos x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1}$ (Liv_3)

Effettuiamo il cambio di variabile ponendo $x - 1 = t$ da cui $x = 1 + t$ e $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(1+t))}{(1+t)^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \pi t)}{t^2 + 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi t)}{t(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi}{t+2} =$$

$$-1 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \sin^2 x)}{1 - \cos x} =$ (Liv_3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \sin^2 x)}{-\sin^2 x} \cdot \frac{-\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \sin^2 x)}{-\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} =$$

$$1 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \right) \cdot 2 = -2$$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\log_2(1 + \sin(5x))} =$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log_2(1 + \sin(5x))} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin(5x)} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \log 2$$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x \cdot \tan x} =$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

12) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(e^{1+\cos x} - 1)(x - \pi)}{\sin(2x) \cdot \tan^2 x} =$ (Liv_4)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{1+\cos x} - 1}{1 + \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(x - \pi)}{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \tan^2 x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2 \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(x - \pi)}{\sin x \cdot \tan^2 x} =$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{(1 - \cos x) \tan^2 x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \tan x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{(1 - \cos x) \tan x} =$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\tan x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{(1 - \cos x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{\tan x} = -\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{1 - (-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{\tan x} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{\tan x} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan(\pi + t)} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = \frac{1}{4}$$

Nota_5

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Nota_6

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \frac{1}{\log a},$$

$$\forall a > 0 \wedge a \neq 1$$

Nota_7

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

13) Provare che risulta

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{1+\cos x} - 1}{\sin(2x)} = 0$$

(Liv_3)

$$\mathbf{14)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x^2 - 4x} =$$

(Liv_1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-4} = 1 \cdot \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\mathbf{15)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x + \arctg x}{\log(1+3x)} =$$

(Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arcsen x}{x} + \frac{\arctg x}{x}}{\frac{\log(1+3x)}{3x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{3x} \cdot 3} = \frac{1+1}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{16)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\arcsen(x^3-1)} - 1}{\arctg(x^2-1)} =$$

(Liv_4)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\arcsen(x^3-1)} - 1}{\arcsen(x^3-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsen(x^3-1)}{x^3-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\arctg(x^2-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

Nota_8

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsen y}{y} = 1$$

Nota_9

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctg y}{y} = 1$$