

Esercitazione sui limiti della forma $\frac{0}{0}$ con i limiti notevoli⁽¹⁾

Per ogni esercizio è riportato l'indicatore Liv_x che ne indica il livello di difficoltà, con $1 \leq x \leq 5$; Liv_1 indica il livello di difficoltà più basso, Liv_5 indica il livello di difficoltà più alto.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x + \tan(4x)} = \frac{3}{5}$

(Liv_2)

Nota_1

Si ricordino i limiti notevoli

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} = 1,$$

con y espresso in radianti.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(3x)}{4x + \sin(2x)} = -\frac{1}{3}$

(Liv_2)

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x} = \frac{1}{2}$

(Liv_2)

Nota_2

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \sin(2x)} = \frac{1}{2}$

(Liv_2)

5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi x} = -\frac{1}{\pi}$

(Liv_2)

Nota_3

Si ricordi la relazione notevole

$$\sin(\pi + t) = -\sin(t),$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

...

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(2x - \pi)^2} = \frac{1}{8}$

(Liv_2)

Nota_4

Si ricordi la relazione notevole

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}$$

7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x}{\tan x - 1} = \frac{1}{2}$

(Liv_2)

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2}$

(Liv_3)

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \sin^2 x)}{1 - \cos x} = -2$

(Liv_3)

Nota_5

Si ricordi il limite notevole

¹ Si ricorda che i simboli $\log x$, $\log(x)$ indicano il logaritmo naturale del numero reale x e la base del logaritmo è il numero di Nepero $e=2,71828182845...$. Nella letteratura matematica il valore numerico logaritmo naturale di $x>0$ è indicato anche con uno dei seguenti simboli $\ln x$, $\ln(x)$. Quando si considera il logaritmo di un numero reale positivo in una base diversa questa va espressamente indicata.

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\log_2(1 + \operatorname{sen}(5x))} = \frac{2}{5} \log 2$$

(Liv_2)

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^2 x} - 1}{x \cdot \operatorname{tg} x} = 1$$

(Liv_2)

$$12) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(e^{1+\cos x} - 1)(x - \pi)}{\operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{4}$$

(Liv_4)

13) Provare che risulta

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{1+\cos x} - 1}{\operatorname{sen}(2x)} = 0$$

(Liv_3)

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2 - 4x} = -\frac{1}{4}$$

(Liv_1)

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arctg} x}{\log(1 + 3x)} = \frac{1}{3}$$

(Liv_2)

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\operatorname{arcsen}(x^3 - 1)} - 1}{\operatorname{arctg}(x^2 - 1)} = \frac{3}{2}$$

(Liv_4)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1$$

Nota_6

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + y)}{y} = \frac{1}{\log a},$$

$$\forall a > 0 \wedge a \neq 1$$

Nota_7

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Nota_8

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} y}{y} = 1$$

Nota_9

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1$$