

Derivabilità

Per una funzione irrazionale intera con modulo

⁽¹⁾ Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x) = x\sqrt{|x| - x^2}$ risolvere i seguenti quesiti.

Q1- Determinare il dominio di definizione, gli zeri ed il segno. Precisare se il diagramma della funzione presenta particolari simmetrie.

Q2- Studiare la derivabilità della funzione in tutto il suo dominio. Determinare le equazioni delle semitangenti agli estremi del dominio.

Q3- Dopo aver determinato la funzione derivata prima, precisare se la funzione $y = f(x)$ è derivabile due volte nel punto $x=0$.

Q4- Riconosciuto nello studio dei punti precedenti che la funzione $y = f(x)$ verifica nell'intervallo $[1;1]$ le ipotesi del teorema di Rolle, indicare i punti interni all'intervallo che soddisfano la proprietà descritta nel suddetto teorema.

Guida alla Soluzione

Q1- La funzione è irrazionale intera e la presenza di una radice quadrata richiede per l'esistenza che sia non negativo l'argomento della radice. Dunque deve essere

$|x| - x^2 \geq 0$; la disequazione è soddisfatta nell'intervallo $[-1;1]$.

Zeri della funzione

L'equazione $f(x) = x\sqrt{|x| - x^2} = 0$ ammette come soluzioni $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Segno della funzione

Ricordato che il valore di una radice quadrata è non negativo, si ottiene rapidamente che:

$f(x) > 0$ per $0 < x < 1$, ...

Simmetrie

... la funzione è dispari ed il suo diagramma ...⁽²⁾.

Q2- Poiché nell'espressione della funzione figura un segno di modulo, ai fini dello studio della derivabilità è opportuno esplicitare la forma della funzione come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{-x - x^2} & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x\sqrt{x - x^2} & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La funzione derivata prima ha la seguente espressione:

⁽¹⁾ La parte relativa ai primi tre quesiti è stata assegnata nella prova scritta M5_5D-16-02-12, quinta classe di Liceo Scientifico, Indirizzo PNI.

⁽²⁾ Per completezza, aggiungiamo che la funzione è continua e poiché è definita in un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, ammette sia massimo, sia minimo assoluti.

...

Per quanto concerne i punti $x=-1$, $x=0$, $x=1$ occorre uno studio particolare. ...

Punto $x=-1$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{-x - x^2} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{-x(1+x)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{-x}\sqrt{1+x}}{x + 1} =$$
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{-1}{0^+} = -1(+\infty) = -\infty; \text{ dunque nel punto } x=-1 \text{ la funzione non \u00e8 derivabile ...}$$

Punto $x=0$

... la funzione \u00e8 derivabile nel punto ed ha derivata nulla.

...

Punto $x=1$

...

A beneficio del lettore abbiamo riportato il diagramma della funzione in tutto il dominio di definizione.

Q3- Ricordiamo che una funzione \u00e8 derivabile due volte in un punto x_0 se nello stesso punto esistono la derivata prima e la derivata seconda. Avendo studiato nel precedente punto la derivabilit\u00e0 in tutto il dominio e precisato che la funzione \u00e8 derivabile in particolare nel punto $x=0$, studiamo il limite del rapporto incrementale della funzione derivata prima nel suddetto punto.

...

Q4- Ricordiamo che le ipotesi previste nel teorema di Rolle per la funzione sono:

- 1) la funzione nell'intervallo $[-1;1]$ deve essere continua ed agli estremi dello stesso deve assumere lo stesso valore;
- 2) la funzione deve essere derivabile in ogni punto interno all'intervallo.

Nella risoluzione dei precedenti quesiti abbiamo dimostrato che le tre propriet\u00e0 indicate sono soddisfatte dalla funzione.

La tesi del teorema prevede che internamente all'intervallo esiste almeno un punto c in cui si annulla la funzione derivata prima: $f'(c) = 0$.

Nel corso dello studio della derivabilit\u00e0 (quesito Q2) abbiamo gi\u00e0 precisato che nel punto $x=0$ si annulla la derivata prima.

...