

Derivabilità

Per una funzione irrazionale intera con modulo

⁽¹⁾ Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x) = x\sqrt{|x| - x^2}$ risolvere i seguenti quesiti.

Q1- Determinare il dominio di definizione, gli zeri ed il segno. Precisare se il diagramma della funzione presenta particolari simmetrie.

Q2- Studiare la derivabilità della funzione in tutto il suo dominio. Determinare le equazioni delle semitangenti agli estremi del dominio.

Q3- Dopo aver determinato la funzione derivata prima, precisare se la funzione $y = f(x)$ è derivabile due volte nel punto $x=0$.

Q4- Riconosciuto nello studio dei punti precedenti che la funzione $y = f(x)$ verifica nell'intervallo $[1;1]$ le ipotesi del teorema di Rolle, indicare i punti interni all'intervallo che soddisfano la proprietà descritta nel suddetto teorema.

Soluzione

Q1- La funzione è irrazionale intera e la presenza di una radice quadrata richiede per l'esistenza che sia non negativo l'argomento della radice. Dunque deve essere

$|x| - x^2 \geq 0$; la disequazione è soddisfatta nell'intervallo $[-1;1]$.

Zeri della funzione

L'equazione $f(x) = x\sqrt{|x| - x^2} = 0$ ammette come soluzioni $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Segno della funzione

Ricordato che il valore di una radice quadrata è non negativo, si ottiene rapidamente che:

$f(x) > 0$ per $0 < x < 1$, mentre $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$.

Simmetrie

Osserviamo che per ogni x del dominio risulta

$$f(-x) = -x\sqrt{|-x| - (-x)^2} = -x\sqrt{|x| - x^2} = -f(x)$$

per cui la funzione è dispari ed il suo diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani⁽²⁾.

Q2- Poiché nell'espressione della funzione figura un segno di modulo, ai fini dello studio della derivabilità è opportuno esplicitare la forma della funzione come segue:

⁽¹⁾ La parte relativa ai primi tre quesiti è stata assegnata nella prova scritta M5_5D-16-02-12, quinta classe di Liceo Scientifico, Indirizzo PNI.

⁽²⁾ Per completezza, aggiungiamo che la funzione è continua e poiché è definita in un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, ammette sia massimo, sia minimo assoluti.

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{-x-x^2} & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x\sqrt{x-x^2} & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La funzione derivata prima ha la seguente espressione:

$$\text{per } -1 < x < 0 \rightarrow f'(x) = \sqrt{-x-x^2} + \frac{x(-1-2x)}{2\sqrt{-x-x^2}} = \sqrt{-x-x^2} + \frac{\sqrt{-x}(1+2x)}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{-x}(3+4x)}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\text{per } 0 < x < 1 \rightarrow f'(x) = \sqrt{x-x^2} + \frac{x(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} = \sqrt{x-x^2} + \frac{\sqrt{x}(1-2x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}}$$

Per quanto concerne i punti $x=-1$, $x=0$, $x=1$ occorre uno studio particolare. Studiamo la derivabilità in ciascuno di detti punti ricorrendo allo studio del limite del rapporto incrementale.

Punto $x=-1$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{-x-x^2} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{-x(1+x)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{-x}\sqrt{1+x}}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{-1}{0^+} = -1(+\infty) = -\infty; \text{ dunque nel punto } x=-1 \text{ la funzione non è derivabile e la}$$

semitangente destra al diagramma della funzione in $(-1;0)$ ha equazione $x=-1$.

Punto $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{|x|-x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|-x^2} = 0 \rightarrow f'(0) = 0; \text{ la funzione è derivabile}$$

nel punto ed ha derivata nulla. La retta tangente al diagramma della funzione è l'asse delle ascisse.

Punto $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{x-x^2} - 0}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{x(1-x)}}{-(1-x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x\sqrt{x}}{-\sqrt{1-x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Dunque la funzione **non è derivabile nel punto $x=1$** e la semitangente sinistra al diagramma della funzione nel punto $(1;0)$ ha equazione $x=1$.

Riportiamo l'espressione completa della funzione derivata prima.

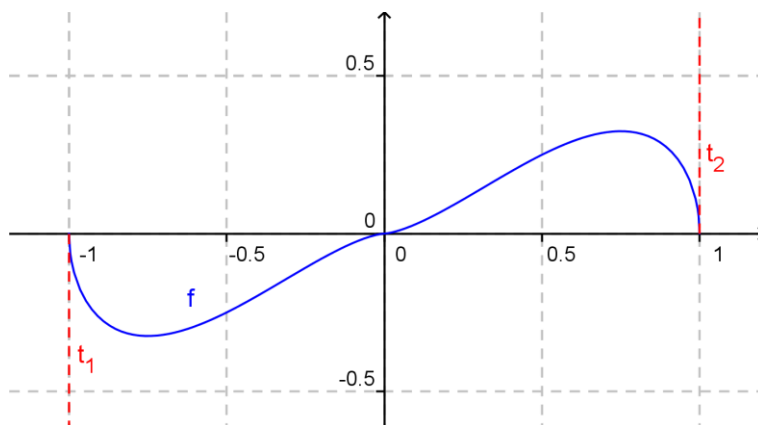


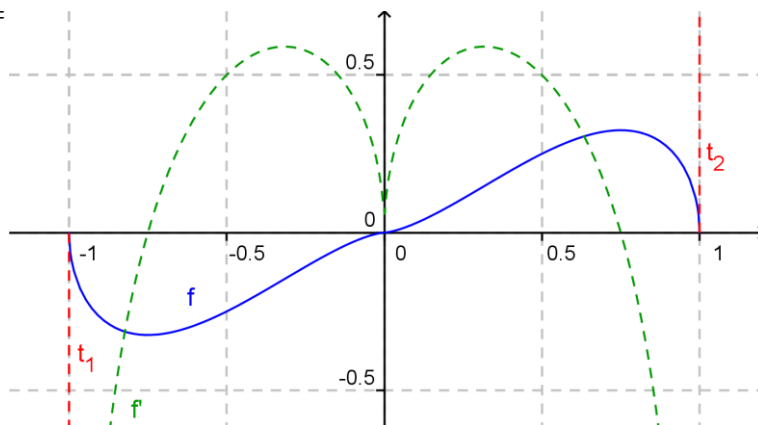
Figura 1-Dall'andamento del diagramma della funzione si evince che la stessa assume il suo massimo assoluto in un punto di $x=\alpha$ (non rappresentato) di ascissa positiva. Il diagramma è simmetrico rispetto all'origine, per cui il punto di minimo assoluto sarà $x=-\alpha$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x}(3+4x)}{2\sqrt{1+x}} & \text{per } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}} & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

A beneficio del lettore abbiamo riportato il diagramma della funzione in tutto il dominio di definizione.

Q3- Ricordiamo che una funzione è derivabile due volte in un punto x_0 se nello stesso punto esistono la derivata prima e la derivata seconda. Avendo studiato nel precedente punto la derivabilità in tutto il dominio e precisato che la funzione è derivabile in particolare nel punto $x=0$, studiamo il limite del rapporto incrementale della funzione derivata prima nel suddetto punto. Evidentemente, avendo la funzione derivata prima espressioni diverse a sinistra e a destra del punto $x=0$, occorrerà studiare i limiti laterali, utilizzando le corrispondenti espressioni della funzione $f'(x)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - 0}{x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left[\sqrt{-x-x^2} + \frac{\sqrt{-x}(1+2x)}{2\sqrt{1+x}} \right] &= \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1+x}}{-\sqrt{-x}} + \frac{1+2x}{-2\sqrt{-x} \cdot \sqrt{1+x}} \right) &= \\ \frac{1}{0^-} + \frac{1}{0^-} = -\infty, \text{ dunque} & \\ f''_-(0) = -\infty. & \end{aligned}$$



Da valore ottenuto per la derivata seconda sinistra nel punto possiamo concludere che **la funzione non è derivabile due volte in $x=0$.**

Figura 2-In figura sono rappresentati i diagrammi delle due funzioni $y = f(x)$, in colore blu, ed $y = f'(x)$, in colore verde. Si nota che il diagramma di $y = f'(x)$ nel punto $x=0$ presenta una cuspid.

Invitiamo il lettore ad eseguire lo studio del rapporto incrementale della funzione derivata prima anche da destra rispetto al punto $x=0$ e verificare che si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = +\infty$$

Q4- Ricordiamo che le ipotesi previste nel teorema di Rolle per la funzione sono:

- 1) la funzione nell'intervallo $[-1;1]$ deve essere continua ed agli estremi dello stesso deve assumere lo stesso valore;
- 2) la funzione deve essere derivabile in ogni punto interno all'intervallo.

Nella risoluzione dei precedenti quesiti abbiamo dimostrato che le tre proprietà indicate sono soddisfatte dalla funzione.

La tesi del teorema prevede che internamente all'intervallo esiste almeno un punto c in cui si annulla la funzione derivata prima: $f'(c) = 0$.

Nel corso dello studio della derivabilità (quesito Q2) abbiamo già precisato che nel punto $x=0$ si annulla la derivata prima. Si tratta ora di stabilire se esistono altri punti interni all'intervallo che abbiano la stessa proprietà.

Ebbene, osservando l'espressione della funzione derivata prima nell'intervallo $]0;1[$, si evince immediatamente che si annulla nel punto $x=3/4$; come pure, nell'intervallo $]-1;0[$, la corrispondente funzione derivata prima si annulla nel punto: $x=-3/4$. Questi altri due punti, insieme al punto $x=0$, già visto, sono gli unici punti interni all'intervallo $]-1;1[$ in cui si annulla la derivata prima e che verificano perciò la tesi del teorema di Rolle.