

Probabilità

applicazione del metodo Montecarlo

Problema

Considerato un triangolo equilatero di lato $l=4\text{cm}$, determinare la probabilità che preso un punto P a caso del triangolo questo si trovi a distanza maggiore di 1cm da ciascun vertice e dal centro O del triangolo.

Soluzione

Sia ABC il triangolo equilatero riportato in figura.

Strategia risolutiva

Ricordiamo che in un triangolo equilatero coincidono l'incentro, il circocentro, l'ortocentro e il baricentro ed il corrispondente punto è il centro del triangolo; in figura è il punto O .

Per ogni vertice del triangolo ABC consideriamo il cerchio avente centro nel vertice e raggio unitario; l'intersezione del cerchio con il triangolo è un settore circolare di ampiezza 60° . In figura sono evidenziati i settori S_A, S_B, S_C aventi rispettivamente vertici nei punti A, B, C . Consideriamo altresì il cerchio λ di raggio unitario avente il centro in O . Osserviamo che se un punto del triangolo deve avere distanza maggiore di 1cm da ciascun vertice del triangolo e dal centro O allora deve appartenere alla regione piana S del triangolo esterna a ciascun settore ed al cerchio λ ; detta regione è ottenuta dalla differenza tra il triangolo ABC e l'unione dei tre settori circolari con il cerchio λ . In figura è la regione piana colorata in giallo.

La probabilità che un punto P preso a caso nel triangolo abbia la proprietà indicata nel testo è data dal rapporto tra l'area di S e quella del triangolo ABC .

Elaborazioni

Osserviamo che l'unione dei tre settori circolari forma un semicerchio di raggio unitario, dunque

$$\text{Area}(S_A \cup S_B \cup S_C) = \pi r^2 : 2 = \frac{\pi}{2} \text{cm}^2, \text{ essendo}$$

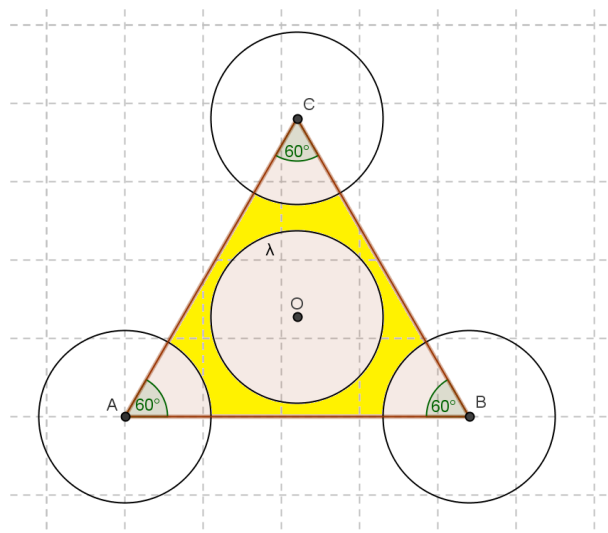
$$r=1\text{cm}.$$

$$\text{Area}(\lambda) = \pi r^2 = \pi \text{cm}^2$$

$$\text{Area}(ABC) = \frac{l^2}{4} \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{cm}^2, \text{ essendo } l=4\text{cm}.$$

$$\text{Area}(S) = \text{Area}(ABC) - (\text{Area}(S_A \cup S_B \cup S_C) + \text{Area}(\lambda)) = 4\sqrt{3} \text{cm}^2 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) \text{cm}^2 =$$

$$\left(4\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi \right) \text{cm}^2$$



Calcolo della probabilità richiesta

$$p = \frac{Area(S)}{Area(ABC)} = \frac{\left(4\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi\right)cm^2}{4\sqrt{3}cm^2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi \approx 0,3198 = 31,98\%$$