

Esercitazione sugli integrali definiti e il calcolo di aree di figure piane

- 1) Considerata la funzione $f(x) = x^2 + x$, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal diagramma della funzione e dall'asse delle ascisse relativamente all'intervallo $[0;1]$.

Soluzione

Riconosciuto che la funzione in oggetto nell'intervallo $[0;1]$ è non negativa, l'area della regione richiesta è il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

- 2) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^3 =$$

$$\frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{14}{3}$$

- 3) Considerata la funzione $y = \frac{1}{x} + 1$, sia A il suo punto di ascissa $x=1$. La retta $s: y=3/2$ interseca il diagramma della funzione nel punto B. Determinare l'area della regione di piano delimitata dal diagramma della funzione, dalla retta s e dalle rette $x=x_A, x=x_B$.

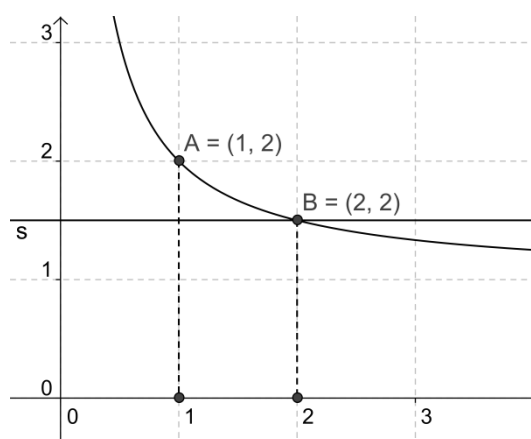
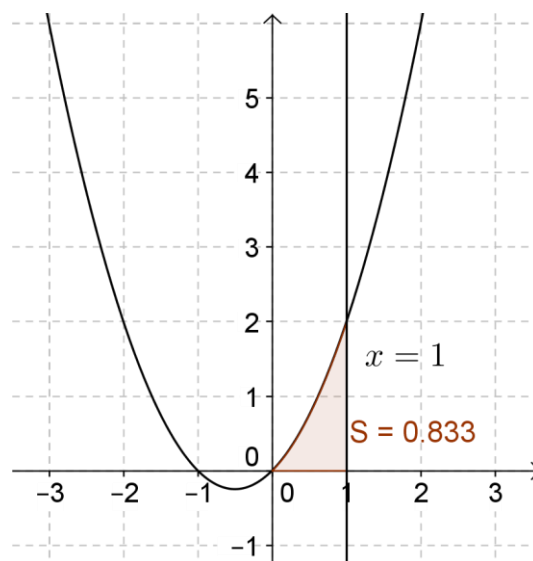
Soluzione

Risulta $A(1; y(1))$, quindi $A(1; 2)$. Per trovare l'ascissa di B si risolve l'equazione

$$\frac{1}{x} + 1 = \frac{3}{2}, \text{ da cui } x = 2; \text{ dunque } B(2; 3/2).$$

La regione di piano cui si fa riferimento è il triangolo mistilineo delimitato inferiormente dalla retta s , superiormente dal diagramma della funzione relativo all'intervallo $[1;2]$ e a sinistra dalla retta $x=1$. L'area della regione è il valore del seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{3}{2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\log|x| - \frac{1}{2}x \right]_1^2 = (\log 2 - 1) - \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \log 2 - \frac{1}{2} \approx 0,1931$$



- 4) Considerata la funzione $y=\sin x$, scrivere l'equazione della retta t tangente al diagramma della stessa nel punto $x=0$, quindi calcolare l'area della regione piana delimitata dalla retta t , dal diagramma della sinusoide e dalle rette $x=0$, $x=\pi/2$.

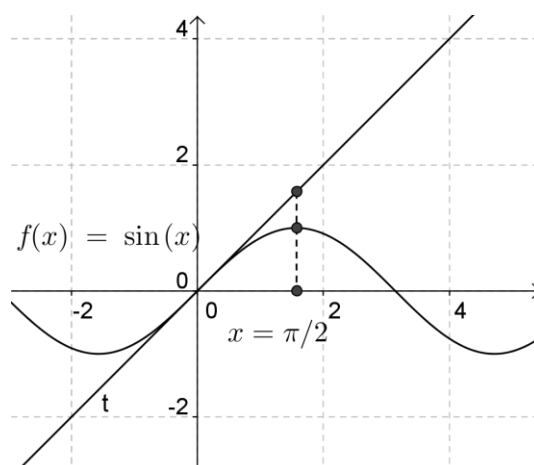
Soluzione

L'equazione della retta tangente in $x=0$ al diagramma della funzione è:

$t: y - y(0) = y'(0)(x - 0)$. Poiché $y'(x) = \cos x$, quindi $y'(0) = 1$, l'equazione della retta tangente è $y=x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante).

Il diagramma della sinusoide, relativamente all'intervallo $[0; \pi/2]$, giace al di sotto della bisettrice $y=x$, per cui il valore dell'area della regione piana in oggetto è quello del seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/2} (x - \sin x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 + \cos 0) = \frac{\pi^2}{8} - 1$$



- 5) Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse delle ascisse e dal diagramma della funzione $y=\log(x+1)$ relativamente all'intervallo $[1; e-1]$.

Soluzione

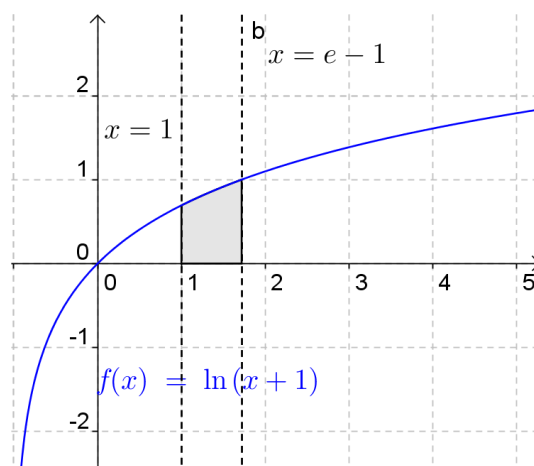
Il valore dell'area della regione piana in oggetto è quello del seguente integrale definito:

$$\int_1^{e-1} \log(x+1) dx.$$

Il calcolo dell'integrale indefinito si esegue applicando il **metodo di integrazione per parti**. Si ha:

$$\begin{aligned} \int \log(x+1) dx &= \int D(x) \cdot \log(x+1) dx = \\ x \cdot \log(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1} dx &= \\ x \cdot \log(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx &= \\ x \cdot \log(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx &= x \cdot \log(x+1) - x + \log(x+1) + c \end{aligned}$$

Il valore dell'integrale definito è:



$$\int_1^{e-1} \log(x+1) dx = \left[x \cdot \log(x+1) - x + \log(x+1) \right]_1^{e-1} = ((e-1)\log e - (e-1) + \log e) +$$

$$-(\log 2 - 1 + \log 2) = 2(1 - \log 2) \approx 0,6137$$

- 6) Considerata la funzione razionale $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 2}$, dopo aver determinato l'equazione dell'asintoto obliquo s , calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal diagramma della funzione, dal suddetto asintoto s e dalle rette $x=1$, $x=4$.

Soluzione

Il diagramma della funzione ammette effettivamente un asintoto obliquo $s: y = mx + q$ per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ e si ha

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x(x+2)} = 1;$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x+2} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x+2} = -3$$

L'asintoto obliquo è $s: y = x - 3$.

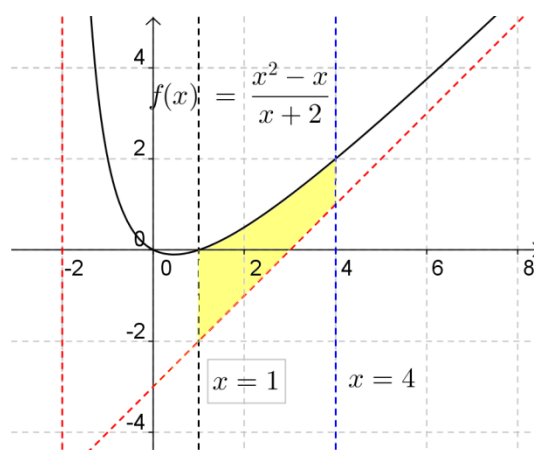
Il diagramma della funzione è un'iperbole che ammette come secondo asintoto la retta $x = -2$.

Relativamente all'intervallo $[1;4]$ il diagramma dell'iperbole giace al di sopra di quello dell'asintoto obliquo, per cui il valore dell'area della regione finita di piano in oggetto è quello del seguente integrale definito:

$$\int_1^4 \left(\frac{x^2 - x}{x+2} - (x-3) \right) dx = \int_1^4 \frac{x^2 - x - (x+2)(x-3)}{x+2} dx = \int_1^4 \frac{6}{x+2} dx = \left[6 \log|x+2| \right]_1^4 =$$

$$6(\log 6 - \log 3) = 6 \log 2$$

In figura la regione piana di cui è stata calcolata l'area è colorata in giallo.



- 7) Relativamente alla funzione esponenziale $f(x) = xe^{-x}$, dopo aver riconosciuto che ammette un punto x_1 di massimo assoluto ed un punto x_2 di flesso, entrambi di ascisse positive, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal diagramma della funzione, dall'asse delle ascisse e dalle rette aventi equazioni $x=x_1$, $x=x_2$.

Soluzione

Osserviamo che la funzione è definita su tutto l'asse reale, è continua ed è dotata di derivate di qualsiasi ordine. Per la ricerca del punto di massimo determiniamo la funzione derivata prima e studiamone gli eventuali zeri ed il segno.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

Si nota che $f'(1) = 0$ e inoltre che $f'(x) > 0$ per $x < 1$, mentre $f'(x) < 0$ per $x > 1$. Deduciamo che la funzione è strettamente crescente per $x < 1$ e strettamente decrescente per $x > 1$; nel punto $x=1$ la funzione ha un massimo che è assoluto: $\text{Max}=f(1)=e^{-1}$.

Per quanto concerne la ricerca del punto di flesso la funzione derivata seconda è

$f''(x) = e^{-x}(x-2)$, dalla quale si evince che $f''(2) = 0$, $f''(x) < 0$ per $x < 2$, $f''(x) > 0$ per $x > 2$; dunque il punto $x=2$ è di flesso (ascendente).

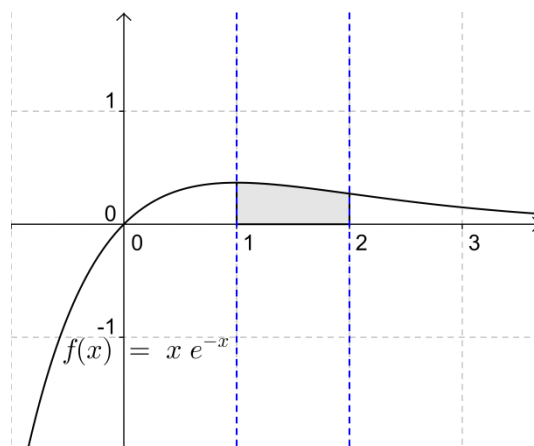
In relazione ai punti denominati nel testo come $x=x_1$, $x=x_2$, risulta $x_1=1$, $x_2=2$; entrambe le ascisse sono positive.

Premesso che la funzione è positiva per ogni $x > 0$, possiamo a questo punto affermare che l'area della regione piana descritta nel testo, cioè del sottografico corrispondente all'intervallo $[1;2]$, è il valore del seguente integrale definito:

$$\int_1^2 x e^{-x} dx$$

Calcoliamo ora per parti l'integrale indefinito e successivamente riprenderemo le operazioni per l'integrale definito.

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= \int x D(-e^{-x}) dx = \\ x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx &= -x e^{-x} - e^{-x} + c = \\ -e^{-x}(x+1) + c \end{aligned}$$



Riprendiamo il calcolo dell'integrale definito.

$$\int_1^2 x e^{-x} dx = \left[-e^{-x}(x+1) \right]_1^2 = -3e^{-2} + 2e^{-1} = e^{-1}(2 - 3e^{-1}) \approx 0,32975$$

- 8) Considerata la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$, dopo aver riconosciuto che è pari e precisato cosa implica detta proprietà relativamente al diagramma della stessa, determinare per quale valore reale positivo di k l'area del sottografico relativo all'intervallo $[-k;k]$ misura $\pi/4$.

Soluzione

La funzione è definita su tutto l'asse reale ed è pari, cioè, per ogni x reale risulta $f(-x)=f(x)$. Questa proprietà implica che il diagramma della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

La funzione assume valori positivi per ogni x del dominio, ammette massimo assoluto in $x=0$, con $f(0)=1/4$ ed è infinitesima per $x \rightarrow \pm\infty$.

L'area del sottografico relativo all'intervallo $[-k;k]$ è il valore del seguente integrale definito

$$\int_{-k}^k \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

che per la parità dichiarata può essere sostituito dal seguente

$$2 \int_0^k \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

Calcolo dell'integrale

Procediamo preliminarmente al calcolo dell'integrale indefinito.

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{1}{4 \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + c$$

L'integrale definito vale

$$2 \int_0^k \frac{1}{x^2 + 4} dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) \right]_0^k = \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{2} \right)$$

Condizione da imporre

L'area del sottografico deve valere $\pi/4$, dunque k deve verificare l'equazione

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{k}{2} \right) = \frac{\pi}{4}, \text{ quindi deve aversi } \frac{k}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1,$$

dunque $k=2$.

$$\text{Pertanto risulta } \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4}.$$

In figura è rappresentato il diagramma della funzione avendo fissato il rapporto di 5:1 tra l'unità di misura per le ascisse e quella per le ordinate. Il sottografico la cui area è $\pi/4$ è evidenziato in colore.

