

Continuità, derivabilità, grafico e calcolo integrale per una funzione definita per casi

Considerata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} h\sqrt{x} & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ k - e^{1-x} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Risolvere i quesiti che seguono.

- 1) Determinare i valori dei parametri h, k in modo che la funzione sia continua e derivabile nel punto $x=1$.
- 2) Riconoscere che la funzione nel suo dominio è strettamente crescente; determinare il suo codominio.
- 3) Dimostrare che il diagramma della funzione ammette un asintoto orizzontale, indicandone l'equazione. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $(1; f(1))$. Rappresentare il diagramma della funzione.
- 4) Riconosciuto che la funzione $y = f(x)$ è invertibile, scrivere l'espressione della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$.
- 5) Rappresentare nello stesso riferimento cartesiano i grafici delle due funzioni $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$, precisando eventuali relazioni tra i due.
- 6) Riconosciuto che i diagrammi delle due funzioni $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ delimitano una regione F finita di piano del primo quadrante, calcolare l'area di F .