

## Continuità, derivabilità, grafico e calcolo integrale per una funzione definita per casi

Considerata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} h\sqrt{x} & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ k - e^{1-x} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Risolvere i quesiti che seguono.

- 1) Determinare i valori dei parametri  $h, k$  in modo che la funzione sia continua e derivabile nel punto  $x=1$ .
- 2) Riconoscere che la funzione nel suo dominio è strettamente crescente; determinare il suo codominio.
- 3) Dimostrare che il diagramma della funzione ammette un asintoto orizzontale, indicandone l'equazione. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto  $(1; f(1))$ . Rappresentare il diagramma della funzione.
- 4) Riconosciuto che la funzione  $y = f(x)$  è invertibile, scrivere l'espressione della funzione inversa  $x = f^{-1}(y)$ .
- 5) Rappresentare nello stesso riferimento cartesiano i grafici delle due funzioni  $y = f(x)$ ,  $y = f^{-1}(x)$ , precisando eventuali relazioni tra i due.
- 6) Riconosciuto che i diagrammi delle due funzioni  $y = f(x)$ ,  $y = f^{-1}(x)$  delimitano una regione  $F$  finita di piano del primo quadrante, calcolare l'area di  $F$ .

### Soluzione

- 1) La funzione è definita nell'intervallo  $[0; +\infty[$ . In ciascuno degli intervalli  $[0; 1[$ ,  $]1; +\infty[$  è senz'altro continua. Affinché lo sia anche nel punto  $x=1$  devono esistere i limiti laterali per  $x \rightarrow 1$ , essere uguali, finiti e coincidenti con  $f(1)$ .

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h\sqrt{x} = h; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} k - e^{1-x} = k - 1;$$

pertanto deve risultare  $h = k - 1$ .

Per la derivabilità nello stesso punto osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{h}{2\sqrt{x}} & \text{per } 0 < x < 1 \\ e^{1-x} & \text{per } x > 1 \end{cases}, \text{ e quindi che } f'_-(1) = \frac{h}{2}, \quad f'_+(1) = e^0 = 1. \text{ Uguagliando i due}$$

valori si ottiene l'uguaglianza  $\frac{h}{2} = 1$ , da cui  $h = 2$ . Dalla condizione sulla continuità si

ricava  $k = 1 + h = 3$ . La funzione è così definita

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 3 - e^{1-x} & \text{per } x \geq 1 \end{cases} \text{ e la derivata prima è } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{per } 0 < x < 1 \\ e^{1-x} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

- 2) Dall'espressione della funzione derivata prima si riconosce che la funzione è derivabile per ogni  $x > 0$  con  $f'(x) > 0$ ; poiché ciò si verifica in un intervallo si deduce che nello stesso la funzione è strettamente crescente.

### Codominio della funzione

Per la stretta crescita in  $]0; +\infty[$  e per la continuità in  $[0; +\infty[$  si deduce che la funzione assume nel punto  $x=0$  il suo minimo assoluto, con  $f(0)=0$ ; il suo estremo superiore coincide con il limite per  $x \rightarrow +\infty$  e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - e^{1-x} = 3 = \text{Sup}(f)$$

Facciamo notare che il valore  $\text{Sup}(f)=3$  non è assunto dalla funzione. La funzione è limitata ed il suo codominio è  $[0; 3[$ .

- 3) Dallo studio del limite per  $x \rightarrow +\infty$  si evince che il diagramma della funzione ammette la retta  $s_1: y=3$  come asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$ .

L'equazione della retta tangente al diagramma nel punto  $P(1; f(1))$  è

$$t: y - f(1) = f'(1)(x - 1), \text{ da cui} \\ t: y = x + 1.$$

In Figura 1 è riportato il diagramma della funzione.

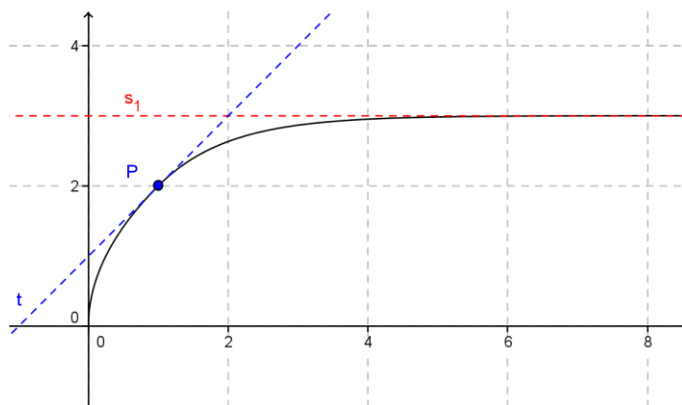


Figura 1- In figura è rappresentata anche la retta tangente nel punto  $(1; f(1))$  al fine di evidenziare che i due archi del diagramma sono raccordati in  $x=1$  e sussiste la derivabilità.

- 4) La funzione in esame,  $f: [0; +\infty[ \rightarrow [0; 3[$ , è invertibile. Per determinare l'espressione della funzione inversa si deve operare distintamente per i due intervalli  $[0; 1[$ ,  $[1; +\infty[$ .

Nell'intervallo  $[0; 1[$

$$\text{Posto } y = f(x) = 2\sqrt{x}, \text{ si ha } x = f^{-1}(y) = \frac{y^2}{4}, \text{ con } 0 \leq y < 2.$$

Nell'intervallo  $[1; +\infty[$

$$\text{Con } y = f(x) = 3 - e^{1-x}, \text{ si ha } e^{1-x} = 3 - y \text{ e per } 2 \leq y < 3 \text{ si ricava } x = f^{-1}(y) = 1 - \log(3 - y).$$

La **definizione della funzione inversa** è pertanto la seguente

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{4} & \text{per } 0 \leq y < 2 \\ 1 - \log(3 - y) & \text{per } 2 \leq y < 3 \end{cases}$$

5) La funzione  $y = f^{-1}(x)$  è così definita

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ 1 - \log(3 - x) & \text{per } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

I diagrammi delle due funzioni  $y = f(x)$ ,  $y = f^{-1}(x)$  sono rappresentati in Figura 2. Com'è noto, i due diagrammi sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante:  $y=x$ .

#### Osservazione

Il diagramma della funzione  $y = f^{-1}(x)$  ammette come asintoto verticale da sinistra la retta  $s_2: x=3$ .

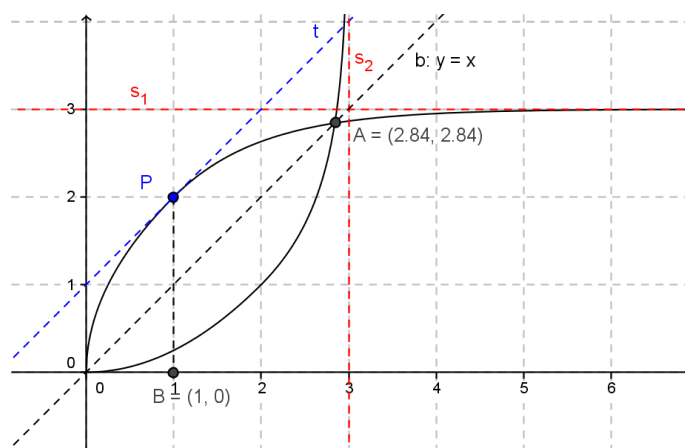


Figura 2-I diagrammi delle due funzioni sono contenuti nel primo quadrante e sono simmetrici rispetto alla bisettrice  $b: y=x$ .

- 6) I due diagrammi si incontrano oltre che nell'origine O degli assi anche nel punto A, appartenente alla bisettrice  $y=x$  la cui ascissa è approssimativamente  $x=2,8414$ , con errore inferiore a 0,0001. Nella tabella riportata a lato è indicato un percorso di ricerca per alcune approssimazioni dell'ascissa del punto A ottenute dal confronto dei valori delle due funzioni  $h(x)=x$ ,  $k(x)=3-e^{(1-x)}$ .

| x      | $h(x)=x$ | $k(x)=3-e^{(1-x)}$ |
|--------|----------|--------------------|
| 2      | 2,00000  | 2,632120559        |
| 2,5000 | 2,50000  | 2,77686984         |
| 2,7500 | 2,75000  | 2,826226057        |
| 2,8000 | 2,80000  | 2,834701112        |
| 2,8300 | 2,83000  | 2,839586432        |
| 2,8400 | 2,84000  | 2,841182574        |
| 2,8410 | 2,84100  | 2,841341312        |
| 2,8414 | 2,84140  | 2,841404763        |
| 2,8415 | 2,84150  | 2,841420621        |

#### Calcolo dell'area della regione F

La regione F è delimitata dall'arco OPA del diagramma di  $y=f(x)$  e dal simmetrico di questo rispetto alla bisettrice  $y=x$ . Il valore dell'area della regione è dunque dato dal seguente integrale definito

$$Area(F) = 2 \int_0^{x_A} (f(x) - x) dx$$

Tenendo conto della definizione della funzione  $y=f(x)$  per l'integrale definito si ha

$$\int_0^{x_A} (f(x) - x) dx = \int_0^{x_P} (f(x) - x) dx + \int_{x_P}^{x_A} (f(x) - x) dx = \int_0^1 (2\sqrt{x} - x) dx + \int_1^{x_A} (3 - e^{1-x} - x) dx$$

Calcolo dei due integrali definiti

$$\int_0^1 (2\sqrt{x} - x) dx = \left[ \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\int_1^{x_A} (3 - e^{1-x} - x) dx = \left[ 3x - \frac{x^2}{2} + e^{1-x} \right]_1^{x_A} = \left( 3 \cdot 2,84 - \frac{2,84^2}{2} + e^{-1,84} \right) - \left( 3 - \frac{1}{2} + 1 \right) \approx 3,13606$$

### Conclusione

Il valore dell'area della regione F è  $Area(F) \approx 2 \left( \frac{5}{6} + 3,13606 \right) \approx 7,93879$ .