

Sul cilindro di volume massimo inscritto in un cono circolare retto

- 1) Dopo aver precisato cosa si intende per **cono circolare retto equilatero**, determinare il cilindro in esso inscritto avente volume massimo. Precisare se il cilindro ottenuto è equilatero. Calcolare il rapporto tra il volume del cilindro di volume massimo ed il volume del cono.
- 2) Determinare le dimensioni del **cilindro equilatero** inscritto nel cono equilatero di cui al precedente punto. Dello stesso cilindro determinare il volume e l'area della superficie totale.
- 3) **Generalizzazione del problema**- Determinare le dimensioni del cilindro di massimo volume inscritto in un cono circolare retto avente come misure del raggio di base e dell'altezza rispettivamente r , h e calcolare il rapporto tra il volume del cilindro e quello del cono. Confrontare il risultato ottenuto in questo caso con quello ottenuto nel quesito (1).

Soluzione

Facciamo riferimento alla Figura 1 nella quale è riportata una sezione di un piano contenente la retta dell'altezza del cono con il cono stesso (triangolo VAB) ed il cilindro inscritto (rettangolo QPP'Q').

- 1) Un cono circolare retto equilatero è un cono avente per base un cerchio, la retta dell'altezza che passa per il centro del cerchio di base e l'apotema avente la stessa misura del diametro del cerchio di base. Sezionando un cono equilatero con un piano contenente la retta dell'altezza si ottiene come intersezione un triangolo equilatero. Nella figura riportata si ha

$$\overline{AB} = 2r \text{ e } AB \cong VB \cong VA.$$

Sia O il punto medio della base AB e P

l'intersezione con AB della generatrice del cilindro inscritto nel cono che deve avere volume massimo. Poniamo $\overline{OP} = x$; evidentemente risulta $0 \leq x \leq r$.

Siano ancora $\overline{OV} = h$, la misura dell'altezza del cono, $\overline{PP'} = h'$, la misura dell'altezza del cilindro in oggetto.

Osserviamo che i triangoli BPP', BOV sono rettangoli simili e quindi sussiste la proporzione $PP':OV = PB:OB$, da cui

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OV} \cdot \overline{PB}}{r} = \frac{r\sqrt{3} \cdot (r-x)}{r} = \sqrt{3} \cdot (r-x), \text{ con } 0 \leq x \leq r.$$

$$\text{Volume del cilindro} \quad V(x) = \pi \cdot \overline{OP}^2 \cdot \overline{PP'} = \pi \cdot \sqrt{3}x^2(r-x)$$

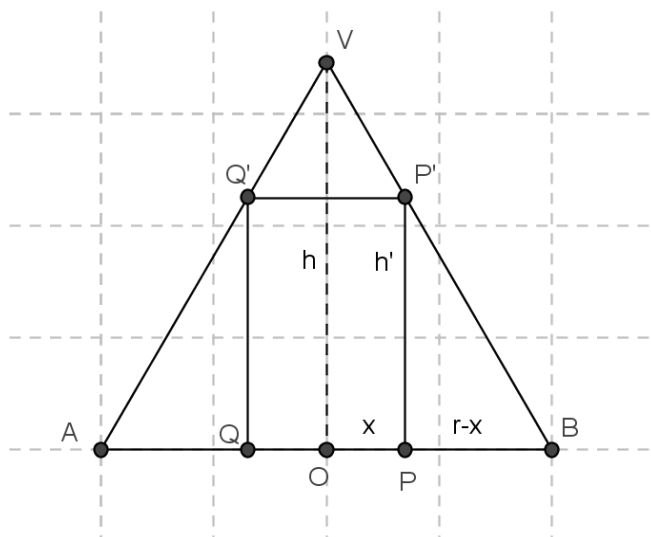


Figura 1- Immagine della sezione di un piano passante per la retta dell'altezza del cono con cono e cilindro inscritto.

Con x variabile nel dominio indicato si deve trovare il valore della variabile per il quale il volume $V(x)$ è massimo. La funzione $V(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo $[0;r]$, quindi certamente ammette minimo e massimo assoluti. La funzione derivata prima è:

$V'(x) = \pi \cdot \sqrt{3} (2xr - 3x^2)$. Studiando la disequazione $V'(x) \geq 0$ si osserva che è soddisfatta per

$0 \leq x \leq \frac{2}{3}r$. La funzione $V(x)$ è strettamente crescente

nell'intervallo $]0; 2r/3[$, strettamente decrescente

nell'intervallo $]2r/3; r[$ e la derivata prima si annulla nei due

punti $x_1=0$, $x_2=2r/3$. Il punto $x_2=2r/3$ è di massimo assoluto per la funzione volume, mentre per $x=x_1$ il cilindro degenera nel segmento dell'altezza VO ed ha volume nullo.

Valore massimo del volume del cilindro

$$V_{\max} = V\left(\frac{2}{3}r\right) = \pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{27} r^3$$

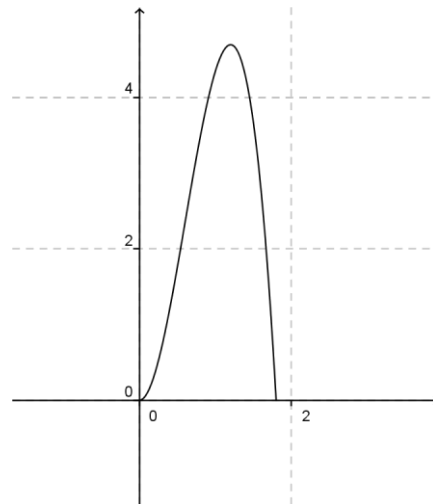


Figura 2- Diagramma della funzione $V(x)$, volume del cilindro inscritto nel cono, con x misura del raggio di base del cilindro.

Il cilindro avente volume massimo è equilatero?

Ricordiamo che **un cilindro circolare retto è equilatero se la sua altezza ha la stessa misura del diametro di base**. Nel caso in esame l'altezza è

$$\overline{PP'} = \sqrt{3} \cdot \left(r - \frac{2}{3}r\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}r,$$

mentre il diametro di base del cilindro è: $2\overline{OP} = 2 \cdot \frac{2}{3}r = \frac{4}{3}r$.

Si conclude che **il cilindro avente volume massimo non è equilatero**.

Rapporto tra volume del cilindro e volume del cono

$$\text{Volume del cono: } V_{\text{cono}}(VAB) = \frac{1}{3} \cdot \pi \overline{OB}^2 \cdot \overline{VO} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi r^3$$

Valore del rapporto

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{cono}}} = \pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{27} r^3 : \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi r^3\right) = \frac{4}{9}$$

2) Cilindro equilatero inscritto nel cono

Come precisato nel precedente punto il cilindro equilatero deve avere il diametro di base e l'altezza congruenti. Facendo riferimento alle elaborazioni riportate sopra, notiamo che il valore di x per cui

il cilindro inscritto diventa equilatero si ottiene dall'uguaglianza $\overline{PP'} = 2\overline{OP}$ e quindi x è la soluzione dell'equazione

$$\sqrt{3} \cdot (r - x) = 2x, \text{ da cui } x = r(2\sqrt{3} - 3).$$

Volume del cilindro equilatero inscritto

$$V_{cil_eq} = \pi \overline{OP}^2 \cdot \overline{PP'} = \pi \overline{OP}^2 \cdot 2\overline{OP} = 2\pi \overline{OP}^3 = 2\pi r^3 (2\sqrt{3} - 3)^3 = \dots = 6\pi r^3 (26\sqrt{3} - 45)$$

Calcolo dell'area della superficie totale del cilindro equilatero

Con x misura del raggio di base del cilindro equilatero, essendo l'altezza $2x$, l'area della superficie totale del cilindro è

$$A_{tot} = 2A_{base} + A_l = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 2x = 6\pi x^2.$$

Ponendo $x = r(2\sqrt{3} - 3)$ si ha

$$A_{tot} = 6\pi r^2 (2\sqrt{3} - 3)^2 = 18\pi r^2 (7 - 4\sqrt{3})$$

- 3) Consideriamo ora il **caso generale** di un **cono circolare retto avente raggio r e altezza h** . Si deve determinare il volume del cilindro circolare retto inscritto nel cono e indicata con x la misura del suo raggio di base, stabilire per quale valore di x il cilindro ha volume massimo.

Per risolvere il problema non è necessario rifare del tutto i calcoli; possiamo recuperare in larga parte il lavoro già svolto nella risoluzione del quesito (1).

Con $\overline{OP} = x$, $\overline{OV} = h$, $\overline{PB} = r - x$, sussiste ancora la proporzione

$$PP':PB=OV:OB, \text{ da cui } \frac{\overline{PP'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{OV} \cdot \overline{PB}}{\overline{OB}^2} = \frac{h \cdot (r - x)}{r^2}, \text{ sempre con } 0 \leq x \leq r.$$

Il volume del cilindro inscritto è

$$V(x) = \pi \cdot \overline{OP}^2 \cdot \overline{PP'} = \pi \cdot \frac{h}{r} x^2 (r - x)$$

Ricerca del massimo

La funzione derivata prima è $V'(x) = \pi \cdot \frac{h}{r} (2xr - 3x^2)$, per il cui segno risulta

$V'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{2}{3}r$ e $V'(x) < 0$ per $\frac{2}{3}r < x < r$; la derivata prima si annulla nei due punti

$x_1=0$, $x_2=2r/3$. Il punto $x_2=2r/3$ è di massimo assoluto per la funzione volume e risulta

$$V_{\max} = V\left(\frac{2}{3}r\right) = \pi \cdot \frac{h}{r} \left(\frac{2}{3}r\right)^2 \left(r - \frac{2}{3}r\right) = \frac{4\pi hr^2}{27}$$

Valore del rapporto tra il volume del cilindro e quello del cono

Tendendo conto che

$$V_{\text{cilindro}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

il rapporto richiesto è

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{cono}}} = \frac{4\pi hr^2}{27} : \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) = \frac{4}{9}$$

Osservazione importante

E' opportuno mettere in risalto che **il rapporto tra il volume del cilindro inscritto nel cono circolare retto avente volume massimo ed il volume del cono stesso vale in ogni caso 4/9, indipendentemente dal tipo di cono considerato.** Quindi, il fatto che anche nella risoluzione del quesito (1) si sia ottenuto come valore del rapporto in esame 4/9 è una semplice conseguenza della proprietà evidenziata con lo studio del caso generale.