

Sulla parabola e sull'applicazione degli integrali definiti

Calcolo di aree di regioni a contorno curvilineo

(Una parabola taglia ortogonalmente una retta)

Problema

Le parabole $\lambda_1 : 8y = x^2$, $\lambda_2 : 3x^2 + 8y = 0$ delimitano con la retta $s : x - y - 2 = 0$ una regione finita di piano F.

Q₁- Riconoscere che la retta s è tangente alla parabola λ_1 e determinare il punto A di contatto.

Q₂-Dimostrare che la parabola λ_2 interseca la retta s in due punti e che nel punto B di ascissa positiva l'attraversamento è ortogonale.

Q₃- Applicando opportunamente la teoria dell'integrazione definita determinare l'area della regione piana F.

Soluzione

Q₁- Per dimostrare che la retta s è tangente alla parabola $\lambda_1 : 8y = x^2$ basta risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due curve e riconoscere che ammette una soluzione doppia.

$$\begin{cases} s : x - y - 2 = 0 \\ \lambda_1 : 8y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} s : y = x - 2 \\ \lambda_1 : 8y = x^2 \end{cases}$$

l'equazione risolvente è $x^2 - 8x + 16 = 0$, che può essere scritta nella forma $(x - 4)^2 = 0$, dalla quale si riconosce che $x=4$ è soluzione doppia. Poiché con $x=4$ si ha $y=2$, deduciamo che la parabola e la retta sono tangenti nel punto A(4;2).

Q₂- Impostiamo il sistema con l'equazione della retta s e l'equazione della parabola $\lambda_2 : 3x^2 + 8y = 0$.

$$\begin{cases} s : x - y - 2 = 0 \\ \lambda_2 : 3x^2 + 8y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} s : y = x - 2 \\ \lambda_2 : 3x^2 + 8y = 0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente

$$3x^2 + 8x - 16 = 0$$

ammette come radici $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{4}{3}$; la retta e la parabola hanno due punti distinti in comune,

perciò la retta è secante la curva. I punti sono $(-4; -6)$, $(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$; il secondo è il punto che nel testo del problema è indicato con B.

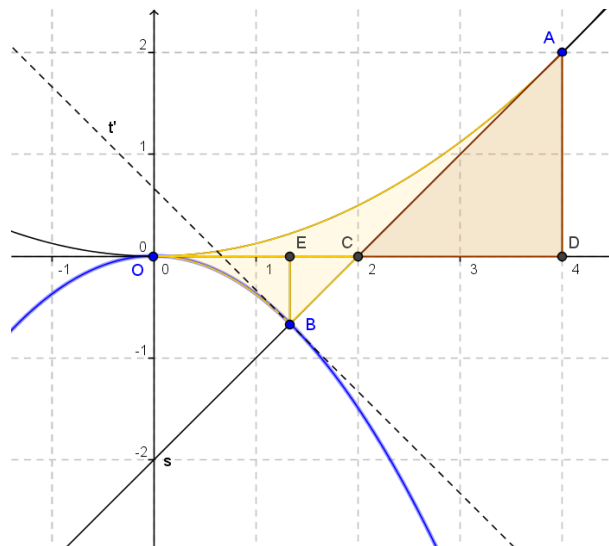
Per dimostrare che l'attraversamento della parabola sulla retta s in B è ortogonale occorre dimostrare che la retta tangente alla parabola nello stesso punto è ortogonale alla retta s ; questa caratteristica si riconosce dal confronto dei coefficienti angolari delle due rette: **se i coefficienti angolari sono antireciproci allora le rette sono ortogonali.**

La retta s ha coefficiente angolare $m(s)=1$.

Il coefficiente angolare della retta tangente a λ_2 nel punto di ascissa $x = \frac{4}{3}$ coincide con il valore

della derivata prima della funzione $y = -\frac{3}{8}x^2$ nello stesso punto.

$y' = -\frac{3}{4}x$, quindi $y'\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right) = -1$
 $= -\frac{1}{m(s)}$ La condizione di ortogonalità è soddisfatta. C.V.D.



Q₃- Calcolo dell'area della figura F (triangolo mistilineo)

Per comporre la figura F possiamo operare come segue.

Consideriamo:

- la figura F_1 composta dal sottografico della funzione $y = \frac{1}{8}x^2$, limitatamente all'intervallo $[0;4]$;
- il triangolo rettangolo T_1 avente vertici $A(4;2)$, $D(4;0)$, $C(2;0)$, essendo C il punto in cui la retta s interseca l'asse delle ascisse;
- la regione piana F_2 del quarto quadrante delimitata dalla parabola λ_2 , dall'asse delle ascisse e dalla retta $x = x_B = \frac{4}{3}$;
- il triangolo rettangolo T_2 di vertici B , C , E , con $E\left(\frac{4}{3};0\right)$;

si riscontra che l'area di F è data da

$$\text{Area}(F) = \text{Area}(F_1) - \text{Area}(T_1) + \text{Area}(F_2) + \text{Area}(T_2).$$

Il calcolo delle aree delle figure F_1 , F_2 si esegue con gli integrali definiti.

Elaborazioni

$$Area(F_1) = \int_0^4 \frac{1}{8} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{24} \right]_0^4 = \frac{8}{3};$$

$$Area(T_1) = \frac{1}{2} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2;$$

$$Area(F_2) = \int_0^{4/3} -\left(-\frac{3}{8} x^2\right) dx = \left[\frac{x^3}{8} \right]_0^{4/3} = \frac{8}{27};$$

$$Area(T_2) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{EC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{9}.$$

In conclusione si ha

$$Area(F) = \frac{8}{3} - 2 + \frac{8}{27} + \frac{2}{9} = \frac{32}{27}$$