

Continuità, derivabilità e diagramma della funzione

Considerata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k(12 - x^2) & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{x} & \text{per } x > 2 \end{cases},$$

risolvere i quesiti

- 1) Determinare k in modo che la funzione sia continua nel suo dominio.
- 2) Per il valore del parametro k trovato, verificare che la funzione ottenuta è anche derivabile in tutto il suo dominio. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x=2$.
- 3) Determinare il dominio della derivata seconda, la concavità e la convessità della funzione, precisando l'esistenza di eventuali flessi.
- 4) Dopo aver studiato il limite per $x \rightarrow +\infty$, tracciare il diagramma della funzione.

Soluzione

- 1) Nell'intervallo $[0;2[$ la funzione è un polinomio ed è continua in ogni suo punto. E' continua anche in ogni punto $x > 2$, perché è una funzione razionale fratta. Affinché la funzione sia continua anche nel punto $x=2$, che è punto di accumulazione a sinistra e a destra, oltre che essere punto del dominio, devono esistere i limiti laterali, essere finiti e coincidere con il valore della funzione nello stesso punto.

$$f(2) = 8k; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2); \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x} = 1.$$

La condizione che deve essere soddisfatta per la continuità è dunque $8k=1$, quindi deve essere $k=1/8$. La funzione è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12 - x^2}{8} & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{x} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

- 2) Derivabilità nell'intervallo $[0;+\infty[$

La funzione derivata prima è così definita:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Per l'esistenza della derivata prima nel punto $x=2$ si devono calcolare i limiti laterali destro e sinistro del rapporto incrementale e verificare che esistono, sono finiti e coincidenti. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{12 - x^2}{8} - 1 \right) \frac{1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{8(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{8(x - 2)} = -\frac{1}{2} = f'_-(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \frac{1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x}{x(x - 2)} = -\frac{1}{2} = f'_+(2)$$

La funzione è derivabile anche nel punto $x=2$ e risulta $f'(2) = -\frac{1}{2}$.

Equazione della retta tangente nel punto $A(2; f(2)) = (2; 1)$

$$t_A: y - f(2) = f'(2)(x - 2), \text{ da cui } t_A: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

3) La funzione derivata seconda è così definita:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ \frac{4}{x^3} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Per precisare l'esistenza o meno della derivata seconda nel punto $x=2$ si devono studiare i limiti laterali del rapporto incrementale della funzione derivata prima. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{4(x - 2)} = -\frac{1}{4} = f''_-(2);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2x^2(x - 2)} = \frac{1}{2} = f''_+(2)$$

Avendo ottenuto due valori diversi si conclude che non esiste la derivata seconda della funzione nel punto $x=2$.

Esistenza di flessi

Dall'espressione della derivata seconda si evince che nell'intervallo $[0; 2[$ la stessa è negativa, e nell'intervallo $]2; +\infty[$ è positiva, quindi la concavità del grafico della funzione è rivolta verso il basso (la funzione è concava) in $[0; 2[$ e verso l'alto in $]2; +\infty[$ (la funzione è convessa). Avendo precisato che esiste la retta tangente nel punto **A(2;1)**, possiamo affermare che detta retta nel punto attraversa il diagramma della funzione e che lo stesso punto **è di flesso con tangente obliqua**.

Negli altri punti del dominio **la funzione** ammette derivata seconda, ma questa non si annulla e quindi **non ammette altri punti di flesso**.

4) Studio del limite per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Il diagramma della funzione ammette l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

Il diagramma della funzione è riportato di seguito.

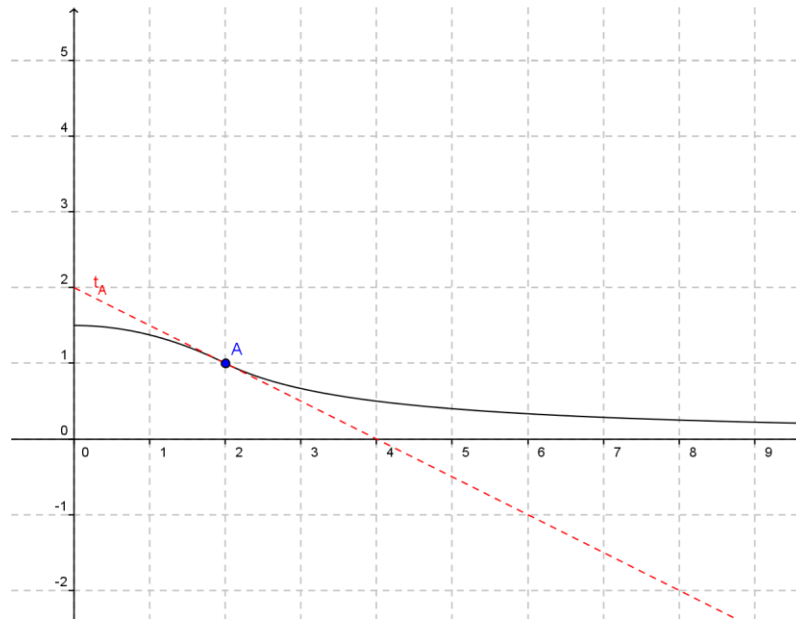


Figura 1- La funzione è derivabile in ogni punto del dominio. Il punto A è di flesso con tangente obliqua.