I043-Esame di Stato di Istruzione secondaria superiore

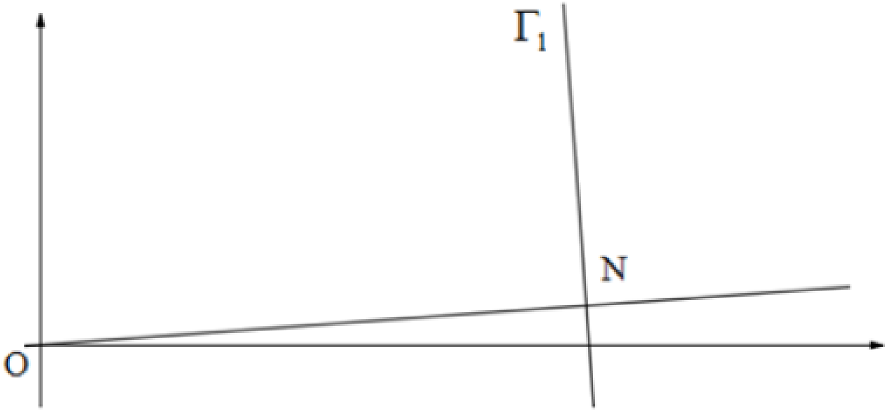
Indirizzi:LI02, EA02-Scientifico
LI03-Scientifico Opzione scienze applicate
LI15-Scientifico-Sezione ad indirizzo sportivo.
(Testo valido anche per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali)

Problema 2[1]

Consideriamo la funzione $f_k : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9 \text{, con } k \in Z.$$

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che k=1 è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P; y_P)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico di Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente in quel punto) passa per l'origine degli assi O.



Figura

Il grafico di Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado n>0 non può possedere più di 2n-1 punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.

---

[1] La figura 1 è tratta dal testo ministeriale pubblicato all'indirizzo http://www.istruzione.it/esame_di_stato/201718/Licei/Ordinaria/I043_ORD18.pdf e resta dunque di proprietà intellettuale dell'autore del testo.

Risoluzione

1. Indichiamo con A il punto del grafico di ascissa 0. Poiché $f_k(0)= 9$ risulta A(0;9). Analogamente, detto B il punto del grafico di ascissa 1risulta B(1; $f_k(1)$)= B(1;8+k).

   Ricordiamo che l'equazione della retta tangente al diagramma della funzione y=$f(x)$ nel punto (x_0; $f(x_0)$), con x_0 appartenente al dominio di definizione, se la funzione è derivabile in x_0 è y- $f(x_0)$= $f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Nel caso in esame la funzione è un polinomio ed è definita e derivabile su tutto R, calcoliamo dunque la funzione derivata prima e i rispettivi coefficienti angolari delle due rette tangenti richieste.

   $f_k^{'}(x)=-3x^2+k \rightarrow f_k^{'}(0)=k$, $f_k^{'}(1)=k-3$. Per le equazioni delle rette tangenti si ha:

   $r_k: y-f_k(0)=f_k^{'}(0)\cdot x \rightarrow r_k: y=kx+9$, per il punto A;

   $s_k: y-f_k(1)=f_k^{'}(1)\cdot(x-1) \rightarrow s_k: y=(k-3)x+11$, per il punto B.

   Si determinano le coordinate del punto M di intersezione tra r_k ed s_k risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette:

   $$\begin{cases} r_k: y=kx+9 \\ s_k: y=(k-3)x+11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} kx+9=(k-3)x+11 \\ y=kx+9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}k+9 \end{cases}$$

   , dunque risulta $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}k+9\right)$.

2. Per rispondere alla prima parte del quesito si deve risolvere la disequazione $y_M<10$, cioè $\frac{2}{3}k+9<10$ nell'incognita k ed avere presente che k∈Z. La disequazione è soddisfatta per i valori di k tali che $k<\frac{3}{2}$ ed evidentemente il più grande numero intero che soddisfa la disuguaglianza è k=1.

   Procediamo con lo studio della funzione $f_1(x)=-x^3+x+9$.

   Della funzione si devono determinare i punti stazionari, il flesso e tracciarne il grafico.

   I **punti stazionari** sono quelli in cui si annulla la derivata prima. Poiché la funzione derivata prima è $f_1^{'}(x)=-3x^2+1$, i suoi zeri sono $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sono questi i soli punti stazionari della funzione. Possiamo classificarli studiando il segno della derivata prima nel dominio. Risulta

   $f_1^{'}(x)>0$ per i valori $-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$, quindi $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di minimo relativo e $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ punto di massimo relativo e i valori sono $f_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{81-2\sqrt{3}}{9}=8,615099...$, $f_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{81+2\sqrt{3}}{9}=9,384900...$.

   Per quanto concerne il **punto di flesso**, ricordiamo che ogni cubica ha un solo punto di flesso e la sua ascissa è il punto in cui si annulla la derivata seconda. Nel nostro caso, poiché la funzione derivata seconda è $f_1^{''}(x)=-6x$, si deduce che il punto di flesso è x=0, con $f(0)$=9, dunque F(0;9); questo punto coincide con il punto A(0;9) individuato prima. Precisiamo che trattasi di un flesso discendente perché la derivata seconda è positiva per x<0 e negativa per x>0.

Per quanto riguarda il **segno della funzione**, avendo precisato il valore del minimo e quello del massimo relativi e notato che la funzione è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $\left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right[$, nonché strettamente crescente nell'intervallo $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, possiamo affermare che la funzione ammette **un solo zero $x=\alpha$** e che risulta $f_1(x)<0$ $\forall x<\alpha$ e $f_1(x)>0$ $\forall x>\alpha$. Possiamo altresì affermare che **il numero α è irrazionale** perché le eventuali radici razionali dell'equazione $f_1(x)=0$, cioè dell'equazione $x^3-x-9=0$ vanno ricercate tra i divisori del termine noto e quindi nell'insieme $\{-1;1;-3;3;-9;9\}$, ma nessuno degli elementi di questo insieme soddisfa l'equazione.

Possiamo fornire un primo **valore approssimato del punto α** osservando che $f_1(2)=3>0$, $f_1(3)=-15<0$ e invocando il teorema di esistenza degli zeri per una funzione reale di variabile reale f:[a;b]$\to$R, definita in un intervallo chiuso e limitato, che assuma agli estremi dell'intervallo valori discordi. Il **teorema di esistenza degli zeri** afferma che **una tale funzione ammette internamente all'intervallo almeno uno zero**. **Nel caso in oggetto** la funzione, avendo derivata prima negativa nell'intervallo considerato, è strettamente decrescente e quindi **lo zero è unico**. Scriviamo dunque che $2<\alpha<3$. Per completezza di informazioni precisiamo che

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=-\infty$, quindi **la funzione non ammette massimo, né minimo assoluti** e il diagramma non ammette alcuna retta asintotica[(2)]. Nel corso dello sviluppo del quesito n.3 avremo modo di ritornare sul valore di α e fornire ulteriori informazioni.

Precisiamo che le due rette tangenti r_1, s_1 hanno equazioni r_1:$y=x+9$, s_1:$y=-2x+11$.

In Figura 1 è riportato parzialmente il diagramma della funzione con i punti particolari fin qui determinati e le due rette tangenti r_1, s_1.

3. Il **Triangolo T** ha come vertici il punto M, di intersezione delle due tangenti, le cui coordinate sono (2/3;29/3), i punti C(-9;0) e D(11/2;0), rispettivamente intersezioni delle rette r_1, s_1 con l'asse delle ascisse.

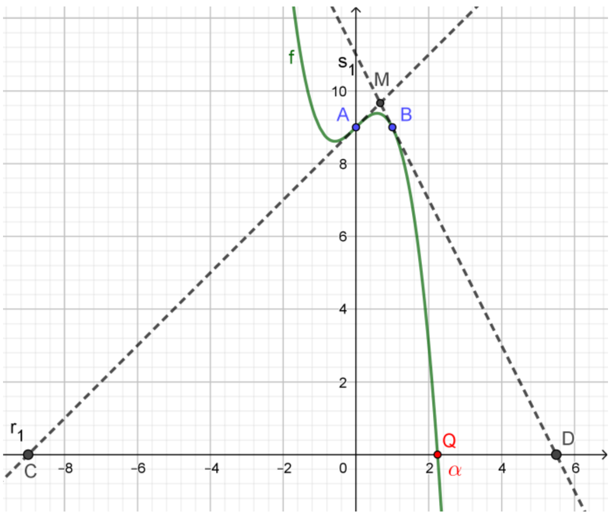


Figura 1

Calcolo della probabilità richiesta

Dove si deve trovare il punto P da prendere a caso nel triangolo CDM?

Definiamo l'evento:

E="Il punto $P(x_P;y_P)$ del piano cartesiano preso internamente al triangolo CDM ha coordinate tali che $y_P>f_1(x_P)$".

Si deve calcolare la probabilità P(E).

(2) Ricordiamo che ogni funzione polinomiale y=P$_n$(x), con n>1, è definita su tutto l'asse reale e il suo diagramma non ammette alcuna retta asintotica per $x\to\pm\infty$.

Strategia risolutiva

Osservando la Figura 1 si evince che P deve essere interno al triangolo mistilineo MAB delimitato dai segmenti MA, MB e dall'arco di curva $\overset{\frown}{AB}$, oppure interno al triangolo mistilineo BQD delimitato dall'arco di curva $\overset{\frown}{BQ}$, dal segmento QD e dal segmento BD. La probabilità dell'evento E è data dal rapporto (3)

$$P(E)=\frac{Area(MAB_{mistil.})+Area(BQD_{mistil.})}{Area(MCD_{triang.})}$$

Per il calcolo della probabilità indicata sono necessari i seguenti elementi:

a) l'area S del triangolo CDM;
b) l'area S_1 del triangolo MAB;
c) l'area S_2 della regione finita di piano delimitata dall'arco di Γ_1 e dalla retta t:y=9, con $0 \le x \le 1$;
d) l'area S_3 del triangolo BB'D, dove B'(1;0) è la proiezione ortogonale di B sull'asse x;
e) l'area del sottografico S_4 della funzione relativa all'intervallo $[x_B;\alpha]$.

Una volta trovati gli elementi indicati la probabilità cercata sarà $P(E)=\dfrac{(S_1-S_2)+(S_3-S_4)}{S}$.

Elaborazioni per determinare gli elementi indicati

a) $S=\frac{1}{2}(x_D-x_C)\cdot y_M=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{11}{2}+9\right)\cdot\frac{29}{3}=\frac{841}{12}$

b) $S_1=\frac{1}{2}(x_B-x_A)\cdot(y_M-y_A)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{29}{3}-9\right)=\frac{1}{3}$

c) $S_2=\int_0^1\left(-x^3+x+9-9\right)dx=\int_0^1\left(-x^3+x\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

d) $S_3=\frac{1}{2}(x_D-x_{B'})\cdot y_B=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}-1\right)\cdot 9=\frac{81}{4}$

e) **(Analisi numerica)** Per il calcolo di S_4 abbiamo bisogno di conoscere il valore dell'ascissa α del punto Q. Possiamo determinare il valore α con la precisione desiderata applicando il **metodo di bisezione**. Nella tabella riportata di seguito sono indicate le elaborazioni necessarie eseguite con Excel. Come si opera?

   a. Si sa che $2<\alpha<3$, con $f_1(2)>0$, $f_1(3)<0$. Poniamo $x'_0=2$, $x''_0=3$
   b. Si sceglie il punto medio $x_m=(x'_0+x''_0)/2$ e si calcola $f_1(x_m)$. Se $f_1(x_m)>0$ allora vuol dire che $x_m<\alpha<3$ e si continua ponendo $x'_1=x_m$, $x''_1=3$, altrimenti sarà $2<\alpha<x_m$ e si continua ponendo $x'_1=2$, $x''_1=x_m$. Si determina il nuovo punto medio $x_m=(x'_1+x''_1)/2$
   c. Si calcola $f_1(x_m)$ e si osserva il

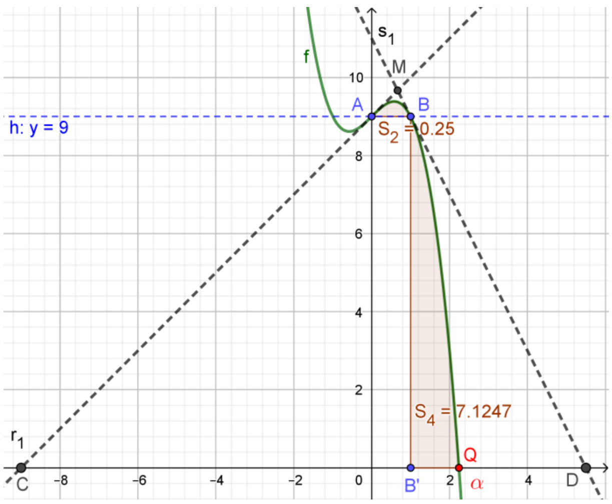


Figura 2

(3) La formula che segue si ispira al calcolo della probabilità dell'evento con il *metodo Monte Carlo*.

suo segno per stabilire in quale dei due intervalli $]x'_1; x_m[$, $]x_m; x''_1[$ ricade α. Deciso in quale dei due intervalli indicati si trova α si procede iterativamente con l'algoritmo di ricerca per definire intervalli sempre più ristretti contenenti α.

Quando arrestare la ricerca?

d. I due estremi x'_n, x''_n con l'aumentare di *n* si avvicinano tra loro sempre di più e da un certo punto in poi si noterà che essi avranno la stessa parte intera e le prime cifre della parte decimale coincidenti. Il numero di cifre decimali coincidenti per i due estremi permette di stabilire la precisione del valore di α. Per esempio, supponiamo che si sia deciso di determinare un valore approssimato per α affetto da errore inferiore a 10^{-k}, con k naturale positivo. Che fare?

e. Sia $l = x''_0 - x'_0 = 3-2=1$ l'ampiezza dell'intervallo di ricerca iniziale. Dopo *n* passaggi si sarà determinato l'intervallo $]x'_n; x''_n[$ contenente il punto α e l'ampiezza di questo intervallo sarà

$$\delta\left(x'_n; x''_n\right) = x''_n - x'_n = \frac{l}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Osserviamo che tutti **i punti estremi degli intervalli** contenenti α che via via si determinano **sono numeri razionali** perché lo sono i due punti iniziali $x'_0=2$, $x''_0=3$ e quindi sono razionali tutti i punti medi che si determinano nell'applicazione dell'algoritmo di ricerca, quindi è razionale anche il punto medio $x_m = \frac{x'_n + x''_n}{2}$ dell'ultimo intervallo, pertanto il valore cercato α è diverso da $x_m = \frac{x'_n + x''_n}{2}$. Al termine della ricerca **prenderemo come valore rappresentativo di α quello del punto medio dell'ultimo intervallo determinato contenente α**; questa scelta permette di affermare che l'errore di cui sarà affetto il valore approssimato x_m di α sarà minore della semiampiezza dell'ultimo intervallo, quindi

$$err = |x_m - \alpha| < \frac{l}{2^n}\cdot\frac{1}{2} = \frac{l}{2^{n+1}}$$ [4] (nel caso specifico è $l=1$)

Imponendo che sia soddisfatta la disuguaglianza $\frac{l}{2^{n+1}} < 10^{-k}$ e risolvendola nell'incognita *n* si stabilisce dopo quanti passaggi il processo iterativo avrà termine.

Risoluzione della disequazione

$$\frac{l}{2^{n+1}} < 10^{-k} \to 2^{n+1} > l\cdot 10^k \to n+1 > \log_2\left(l\cdot 10^k\right) \to n > \log_2\left(l\cdot 10^k\right) - 1 \qquad (1^*)$$

Dunque *n* sarà il più piccolo numero naturale verificante la (1*).

Per essere concreti, nel caso in esame, supponiamo di voler fornire un'approssimazione di α con errore inferiore a $0{,}001=10^{-3}$. Dovrà risultare

$$n > \log_2\left(1\cdot 10^3\right) - 1 = 9{,}96578\ldots - 1 = 8{,}96578\ldots;$$

il primo valore utile per *n* sarà 9, perciò occorreranno 9 passaggi.

---

(4) Nel caso specifico è $l=1$, ma se l'intervallo iniziale comprendente α fosse $]a;b[$, con $a<b$ la maggiorazione per l'entità dell'errore sarebbe quella indicata.

Nella tabella che segue sono riportate le elaborazioni della ricerca effettuata con il foglio elettronico Excel, avendo effettuato 16 passaggi. Osserviamo che al **nono passaggio l'intervallo contenente lo zero α è]2,2382813; 2,2402344[** e la sua semiampiezza è

$\delta/2=(2{,}2402344-2{,}2382813)/2=9{,}7655\cdot10^{-4}<0{,}001$,

come appunto ci si aspettava.

Chiudiamo queste considerazioni facendo notare che dal 15° passaggio gli estremi dell'intervallo contenente α hanno coincidente la parte intera e le prime quattro cifre decimali. Assumendo α=2,2400 possiamo affermare che le quattro cifre decimali sono esatte. Ebbene, questo sarà il valore che noi assumeremo come approssimazione dell'ascissa del punto Q del grafico per i calcoli necessari che ci permetteranno di calcolare la probabilità richiesta.

Ricerca del valore approssimato di α con il metodo di bisezione					
$f(x)=-x^3+x+9$					
	a=2	b=3	$\alpha=x_m$		
n	x'	x''	$x_m=(x'+x'')/2$	$f(x_m)$	$l=x''-x'$
0	2,0000000	3,0000000	2,5000000	-4,125000	1,0000000
1	2,0000000	2,5000000	2,2500000	-0,140625	0,5000000
2	2,0000000	2,2500000	2,1250000	1,529297	0,2500000
3	2,1250000	2,2500000	2,1875000	0,719971	0,1250000
4	2,1875000	2,2500000	2,2187500	0,296173	0,0625000
5	2,2187500	2,2500000	2,2343750	0,079411	0,0312500
6	2,2343750	2,2500000	2,2421875	-0,030197	0,0156250
7	2,2343750	2,2421875	2,2382813	0,024709	0,0078125
8	2,2382813	2,2421875	2,2402344	-0,002718	0,0039063
9	2,2382813	2,2402344	2,2392578	0,011002	0,0019531
10	2,2392578	2,2402344	2,2397461	0,004144	0,0009766
11	2,2397461	2,2402344	2,2399902	0,000713	0,0004883
12	2,2399902	2,2402344	2,2401123	-0,001002	0,0002441
13	2,2399902	2,2401123	2,2400513	-0,000144	0,0001221
14	2,2399902	2,2400513	2,2400208	0,000284	0,0000610
15	2,2400208	2,2400513	2,2400360	0,000070	0,0000305
16	2,2400360	2,2400513	2,2400436	-0,000037	0,0000153

Possiamo procedere ora con il calcolo dell'area del sottografico della funzione indicato con S_4.

$$S_4=\int_1^{2,24}\left(-x^3+x+9\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+9x\right]_1^{2,24}=\left(-6{,}294077+2{,}5088+20{,}16\right)-\left(-0{,}25+0{,}5+9\right)=$$
$$7{,}124723$$

Calcolo della probabilità richiesta

$$P(E)=\frac{(S_1-S_2)+(S_3-S_4)}{S}=\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{81}{4}-7{,}124723\right)}{841:12}\simeq 0{,}18847=18{,}847\%$$

4. Consideriamo il polinomio di grado n $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$.

Com'è noto i polinomi sono funzioni continue e dotate di derivata di qualsiasi ordine su tutto R e quindi il corrispondente diagramma ammette retta tangente in un qualsiasi punto $P_0(x_0;P_n(x_0))$. L'equazione della tangente è

$t_{P_0}: y - P_n(x_0) = P_n'(x_0)\cdot(x - x_0)$, dove $P_n'(x_0)$ è il valore della derivata prima del polinomio in x_0 .

La normale al diagramma della funzione polinomio nel punto $P_0(x_0;P_n(x_0))$ esiste per ogni punto del diagramma stesso, perché come precisato esiste la derivata prima in ogni punto $x_0 \in$R e se risulta

$P_n'(x_0) \neq 0$ la retta normale n_{P_0} avrà equazione

$$n_{P_0}: y - P_n(x_0) = -\frac{1}{P_n'(x_0)}\cdot(x - x_0) \qquad (2^*)$$

Evidentemente se x_0 è un punto stazionario, poiché la derivata prima si annulla, la retta tangente al diagramma della funzione $P_n(x)$ nello stesso punto è parallela all'asse delle ascisse e quindi la corrispondente normale sarà una retta parallela all'asse delle ordinate che avrà equazione $x=x_0$, che non si può porre nella forma esplicita (2*). Per altro, una tale normale passa per l'origine degli assi solo se coincide con l'asse y, quindi solo se il punto $x_0=0$. Per tutti gli altri eventuali punti stazionari le corrispondenti normali al diagramma non passeranno certamente dall'origine O degli assi cartesiani.

E' appena il caso di precisare che i polinomi $P_n(x)$ i cui diagrammi hanno come normale nel punto $x=0$ proprio l'asse y sono quelli la cui derivata prima si annulla in $x=0$, per i quali cioè risulta $P_n'(0) = 0$, e quindi sono solo i polinomi di grado maggiore o uguale a 2 mancanti del termine di primo grado ($a_{n-1}=0$).

Consideriamo dunque l'insieme dei punti $\mathbf{P_0(x_0;P_n(x_0))}$ del diagramma della funzione, con $\mathbf{x_0\neq 0}$ e per i quali si abbia $P_n'(x_0) \neq 0$. Affinché la normale nel punto passi dall'origine degli assi la sua equazione deve essere soddisfatta dalla coppia (0;0), quindi deve sussistere l'uguaglianza

$0 - P_n(x_0) = -\frac{1}{P_n'(x_0)}\cdot(0 - x_0)$, che diventa $-P_n(x_0) = \frac{x_0}{P_n'(x_0)}$, che ancora, per l'ipotesi $P_n'(x_0) \neq 0$, si trasforma nell'equazione equivalente

$$P_n(x_0)\cdot P_n'(x_0) + x_0 = 0 \qquad (3^*)$$

L'equazione (3*) ottenuta nell'incognita x_0 ha grado pari alla somma dei gradi dei due polinomi $P_n(x_0)$, $P_n'(x_0)$, che sono rispettivamente n e n-1, quindi il grado dell'equazione 2n-1.

Dal **teorema fondamentale dell'algebra** si sa che un polinomio a coefficienti reali di grado n ammette nel **campo complesso** esattamente n radici e le radici complesse non reali sono presenti a coppie (se $z_1=a+ib$ è radice lo è anche il numero coniugato $z_2=a-ib$), pertanto l'equazione (3*) ammette certamente 2n-1 radici nel campo complesso e se di esse nessuna è complessa allora ammetterà 2n-1 radici reali. Questa conclusione è quanto nel quesito 4 della prova si pretendeva di dimostrare. E' bene precisare che i 2n-1eventuali punti non è detto che siano distinti, alcune radici dell'equazione (3*) potrebbero avere molteplicità maggiore di 1; in questo caso, il numero massimo di punti aventi la proprietà dichiarata è minore di 2n-1.

Osservazione particolarmente importante

Abbiamo dedotto la (3*) ricercando punti $\mathbf{P_0(x_0;P_n(x_0))}$ del diagramma della funzione, con $\mathbf{x_0 \neq 0}$ e per i quali si abbia $P_n'(x_0) \neq 0$. Possiamo però notare che se il punto x=0 è stazionario, quindi se risulta $P_n'(0) = 0$, allora l'equazione (3*) è soddisfatta anche da $\mathbf{x_0=0}$, quindi nel numero massimo 2n-1di punti è compreso anche il punto (0; $P_n(0)$).

Nota aggiuntiva

Nel testo si afferma che "il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà". Non si tratta di una proprietà che il Candidato deve dimostrare; si tratta semplicemente di un'informazione sulle proprietà specifiche del polinomio $P_3(x) = -x^3 + x + 9$. Proviamo in questa parte che l'affermazione è vera.

Omettiamo i calcoli necessari per ottenere la forma finale dell'equazione (3*) corrispondente. L'equazione è la seguente

$$-3x_0^5 + 4x_0^3 + 27x_0^2 - 2x_0 - 9 = 0$$

Si può riconoscere agevolmente la proprietà rappresentando il diagramma della funzione polinomiale e "osservare" che interseca l'asse delle ascisse in tre punti distinti.

Il diagramma è riportato in Figura 3

Le ascisse dei punti A, B, C sono rispettivamente $x_A \approx$-0,5583, $x_B \approx$0,5954, $x_C \approx$2,2286.

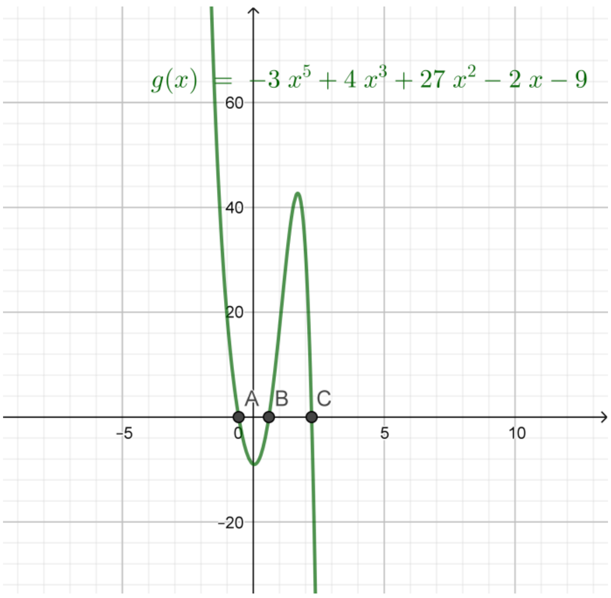


Figura 3 Il grafico di questa funzione evidenzia che esistono tre intersezioni con l'asse delle ascisse ma la funzione di riferimento è di quinto grado. Gli zeri corrispondenti hanno ascisse che rappresentano quelle dei punti della curva Γ_1 nei quali la normale passa per l'origine degli assi.