Sessione Ordinaria
Seconda Prova scritta del 21-giugno-2018
I043-Esame di Stato di Istruzione Secondaria Superiore
Indirizzi:LI02, EA02-Scientifico
LI03-Scientifico Opzione Scienze Applicate
LI15-Scientifico-Sezione Ad Indirizzo Sportivo.

Commento al problema 2

Il **primo approccio** con la traccia dà l'impressione che il Candidato debba misurarsi con le problematiche associate ad una **funzione parametrica** e quindi che il percorso risolutivo possa essere irto di ostacoli. In realtà di elaborazioni parametriche c'è ben poco. Premesso che la funzione proposta è un polinomio di terzo grado (e questo tipo di funzioni non nascondono particolari insidie),

la prima questione da risolvere consiste nello scrivere le equazioni delle rette tangenti nei punti di ascissa 0 e 1del grafico Γ_k , per la qual cosa si deve determinare la funzione derivata prima, calcolarla nei punti suddetti e risolvere il sistema delle due equazioni ottenute per riscontrare che il punto di intersezione delle due rette è il punto M di ascissa 2/3;

la **seconda questione** richiede di risolvere una semplicissima disequazione di primo grado per verificare "che k=1 è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10".

Entrambe le questioni si risolvono con pochi calcoli e in brevissimo tempo. In particolare, per risolvere la prima questione il Candidato deve **conoscere il significato geometrico della derivata prima in un punto di una funzione *f*(x)** e **saper scrivere l'equazione della retta tangente in (x_0; *f*(x_0))** utilizzando "la forma esplicita dell'equazione di una retta". Il lavoro da svolgere successivamente riguarda la particolare funzione polinomio di terzo grado $f_1(x) = -x^3 + x + 9$, senza più alcuna traccia del parametro.

Per completare la risoluzione del **quesito n.2** si devono ricercare i punti stazionari (sono i punti in cui la derivata prima si annulla) e quello di flesso (tutte le cubiche hanno un solo punto di flesso), quindi tracciare il grafico della funzione polinomio indicata.

Ritengo che il Candidato per tracciare il grafico avrà cercato di determinare il segno della funzione, studiato il comportamento della stessa per $x \to \pm\infty$ e avrà notato che il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse nel solo punto $x=\alpha$ di cui avrebbe dovuto determinare un valore approssimato. Questa sarà stata, a mio avviso, **la prima sfida**. Già! Infatti **il polinomio** $-x^3 + x + 9$ **non ha zeri razionali**, come si riscontra verificando che nessuno dei divisori del termine noto 9 lo annulla, quindi volendo determinare il punto $x=\alpha$ dovrà aver fatto ricorso ad un **particolare procedimento** che l'analisi matematica mette a disposizione, come il **metodo di bisezione o quello delle tangenti e delle secanti di Newton-Fourier**. Ma prima ancora di aver cercato di affrontare numericamente il problema avrà dovuto precisare perché la funzione polinomio in esame ammette certamente il solo zero $x=\alpha$ e quindi avrà dovuto **citare il teorema di esistenza degli zeri** per una funzione continua definita in un intervallo [a;b], magari enunciandolo espressamente. Immagino che un qualsiasi Candidato, adeguatamente preparato, avrà voluto giustificare le proprie affermazioni. **La parte del testo "…,studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e il flesso e tracciandone il grafico", di per sé succinta, sottintende un lavoro piuttosto complesso** e tramite il quale il Candidato può dimostrare di aver acquisito nello studio dell'analisi matematica le competenze necessarie. Del resto, non si richiede di "tracciare un grafico approssimativo" della funzione in oggetto. Dunque si devono fornire proprietà specifiche che la funzione ha.

Quale che sia stato il procedimento messo in atto per la ricerca del punto $x=\alpha$ si sarà dovuta sviluppare una certa mole di lavoro, di cui il Commissario valutatore avrà dovuto tener conto.

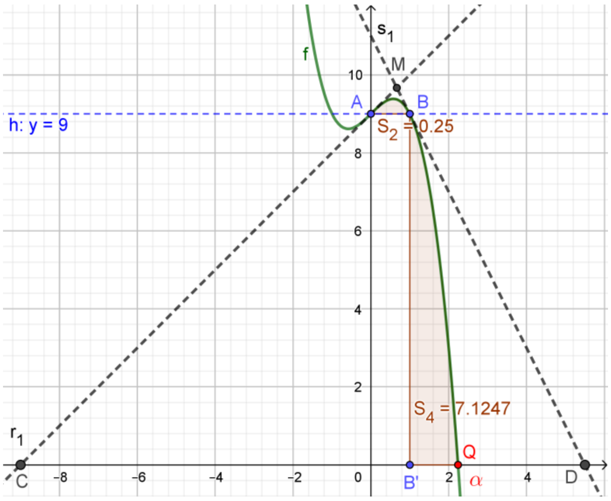
In conclusione, lo sviluppo completo del quesito n.2 richiede abbastanza impegno. Tra l'altro, come ci si accorge **nella trattazione del quesito n.3** sull'applicazione della probabilità, **è necessaria la conoscenza del punto $x=\alpha$** per poter eseguire il calcolo della probabilità richiesta.

Considerazioni sul quesito n.3

Per risolvere il problema posto il Candidato deve innanzitutto **individuare la posizione utile in cui può stare il punto P da prendere a caso nel triangolo T** definito dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse. Considerato il punto $P(x_P;y_P)$ deve determinare la probabilità del seguente evento:

E="Il punto $P(x_P;y_P)$ del piano cartesiano preso internamente al triangolo T ha coordinate tali che $y_P > f_1(x_P)$".

Come aiuto al lettore riporto a margine una figura di riferimento osservando la quale si evince che P deve essere interno al triangolo mistilineo MAB delimitato dai segmenti MA, MB e dall'arco di curva $\overset{\frown}{AB}$, oppure interno al triangolo mistilineo BQD delimitato dall'arco di curva $\overset{\frown}{BQ}$, dal segmento QD e dal segmento BD. La probabilità dell'evento E è data dal rapporto [(1)]



$$P(E)=\frac{Area(MAB_{mistil.})+Area(BQD_{mistil.})}{Area(MCD_{triang.})}$$

Per il calcolo della probabilità indicata sono necessari i seguenti elementi:

a) l'area S del triangolo CDM;
b) l'area S_1 del triangolo MAB;
c) l'area S_2 della regione finita di piano delimitata dall'arco di Γ_1 e dalla retta t:y=9, con $0\leq x\leq 1$;
d) l'area S_3 del triangolo BB'D, dove B'(1;0) è la proiezione ortogonale di B sull'asse x;
e) l'area del sottografico S_4 della funzione relativa all'intervallo $[x_B;\alpha]$.

Come si dimostra nella risoluzione del relativo quesito nello sviluppo completo del problema n.2 si può assumere $\alpha=2{,}24$.

Concludiamo che il lavoro necessario è notevole: calcolo dell'area di due triangoli, calcolo di due integrali definiti e scomposizione di figure. Precisiamo che il valore della probabilità richiesta è circa 18,85% .

Sarebbe interessante che il Ministero, che ha la possibilità di farlo, successivamente **facesse conoscere quale percentuale di candidati ha affrontato e risolto correttamente il quesito n.3**.

A mio avviso, la risoluzione della seconda parte del quesito n.2 e del quesito n.3 rappresenta almeno l'80% del lavoro richiesto per la risoluzione dell'intero problema n.2.

[(1)] La formula che segue si ispira al calcolo della probabilità dell'evento con il *metodo Monte Carlo*.

Figura 1

Considerazioni sul quesito n.4

Per la risoluzione del quesito il Candidato deve fissare il generico punto del grafico **$P_0(x_0;P_n(x_0))$** e osservare innanzitutto che in esso esiste la retta tangente perché ogni funzione polinomio è derivabile in tutto il suo dominio che è R, quindi esiste la normale alla tangente nello stesso punto.

Una leggera difficoltà è insita nella struttura dell'equazione della normale ad una retta. Utilizzando la forma esplicita, se l'equazione della tangente nel punto è

$$t_{P_o}: y-\mathrm{P}_n(x_0)=\mathrm{P}_n^{'}(x_0)\cdot(x-x_0)\ ,$$

allora l'equazione della normale sarà

$$n_{P_0}: y-\mathrm{P}_n(x_0)=-\frac{1}{\mathrm{P}_n^{'}(x_0)}\cdot(x-x_0),$$

ma solo se il coefficiente angolare della tangente è diverso da zero, $\mathrm{P}_n^{'}(x_0)\neq 0$, quindi per i punti stazionari occorre una discussione a parte. Detto ciò, imponendo la condizione algebrica che l'equazione della normale sia soddisfatta dalla coppia (0;0) si perviene all'equazione nell'incognita x_0

$$\mathrm{P}_n(x_0)\cdot\mathrm{P}_n^{'}(x_0)+x_0=0 \qquad (*)$$

il cui grado è $n+n-1=2n-1$. Quest'equazione nel campo complesso ammette $2n-1$ radici [(2)], che possono essere tutte distinte oppure alcune avere molteplicità maggiore di uno. Facciamo notare che il grafico della funzione polinomio la $\mathrm{P}_n(x)$ ammette effettivamente $2n-1$ punti distinti nei quali la normale alla tangente passa per l'origine degli assi solo se le $2n-1$ radici dell'equazione (*) sono tutte reali e distinte tra loro.

Per altri dettagli sulla questione si rinvia alla risoluzione completa del problema in esame.

Luigi Lecci:www.matematicaescuola.it

01-lug-2018

[(2)] Qui si deve richiamare il teorema fondamentale dell'algebra " un polinomio a coefficienti reali di grado *n* ammette nel **campo complesso** esattamente *n* radici".