QUESTIONARIO

Quesito 10 (Una funzione che non verifica le ipotesi del teorema di Rolle…)

Data la funzione:

$$f(x)=\left|4-x^2\right|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [-3;3] e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo [-3;3] in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Risoluzione

Prima parte (condizioni che devono essere soddisfatte per l'applicazione del teorema di Rolle)

La funzione in questione è definita su tutto l'asse reale ed è continua. La sua esplicitazione è

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & per \quad -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & per \quad (x<-2)\vee(x>2) \end{cases}$$

Limitatamente all'intervallo [-3;3] una funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle se:

1) è continua e definita su tutto l'intervallo (questa ipotesi è soddisfatta dalla funzione in oggetto);
2) agli estremi dell'intervallo la funzione assume lo stesso valore. Poiché $f(3)=9-4=5$, $f(-3)=(-3)^2-4=5$, l'ipotesi è soddisfatta;
3) internamente all'intervallo la funzione deve essere derivabile. Facciamo vedere che questa condizione non è soddisfatta perché nei punti $x_1=2$ e $x_2=-2$, punti interni all'intervallo, non esiste la derivata prima.

   Proviamo l'affermazione ricorrendo alla definizione di derivata prima in un punto come limite del rapporto incrementale della funzione.

   Per il punto x_1=2

   Poiché a sinistra del punto l'espressione della funzione è diversa dell'espressione a destra dello stesso punto studiamo i limiti laterali destro e sinistro del rapporto incrementale. Si ha:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{4-x^2-(4-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(2+x)(2-x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(-2-x)=-4=f'_-(2);$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4-(4-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4=f'_+(2)$$

   Poiché i valori ottenuti per la derivata prima a sinistra e destra nel punto sono finiti ma diversi tra loro si conclude che nel punto x=2 la funzione non è derivabile.

   Per il punto x_2=-2

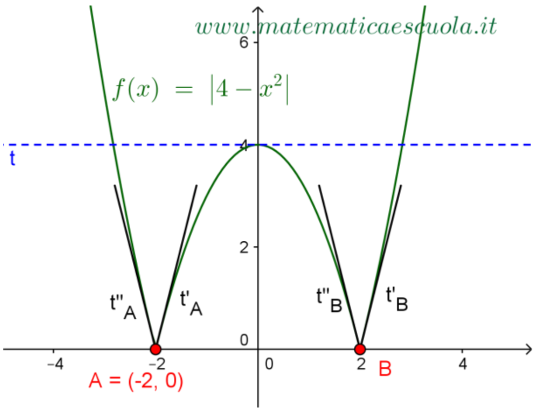
Operando in modo analogo si ottengono i valori della derivata prima sinistra e della derivata prima destra nel punto, $f'_{-}(-2)=-4$, $f'_{+}(-2)=4$; i valori sono diversi quindi la funzione non è derivabile nel punto x=-2.

In definitiva la funzione in oggetto non è derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo [-3;3], non essendolo nei punti -2 e 2, quindi **non verifica nell'intervallo tutte le ipotesi previste nel teorema di Rolle, pertanto alla stessa non si può applicare detto teorema**.

Seconda Parte (L'esempio contraddice il teorema di Rolle?)

La domanda sembra quasi una provocazione per lo studente. Quale che sia il teorema e l'ambito della sua applicazione, una volta definito l'insieme in cui si ritiene di poter applicare il teorema (in questo caso nell'insieme delle funzioni reali di variabile reale continue e derivabili) la struttura logica del teorema è la seguente: se l'oggetto in esame verifica le ipotesi previste nel teorema (quindi se l'oggetto possiede alcune particolari proprietà) allora si verificherà quanto contenuto nella tesi del teorema.

Nel caso in esame, la funzione $f(x)=\left|4-x^2\right|$ nell'intervallo [-3;3] non verifica tutte le caratteristiche previste nelle ipotesi del teorema di Rolle, quindi questo teorema non si può applicare. Ciò tuttavia non esclude che la particolare funzione considerata nel quesito possa ammettere internamente all'intervallo uno o più punti nei quali la funzione abbia la proprietà dichiarata nella tesi del teorema, nei quali abbia cioè nulla la derivata prima. In effetti la funzione derivata prima della funzione in esame è così definita



$$f'(x)=\begin{cases}-2x & per \quad -2<x<2 \\ 2x & per \quad (x<-2)\vee(x>2)\end{cases}$$

e si annulla nel punto x=0 che è interno all'intervallo [-3;3], ma ciò, ribadiamo, non contraddice affatto il teorema di Rolle.

In figura è riportato parzialmente il diagramma della funzione dal quale si riconosce che nei punti A e B di ascisse rispettivamente -2 e 2 il diagramma presenta due punti angolosi e per i quali sono tracciati i segmenti rappresentativi delle semitangenti al grafico negli stessi punti.

Aggiungiamo che le equazioni delle semitangenti indicate sono:
$t'_A: y=4(x+2)$, $\quad t''_A: y=-4(x+2)$, $\quad t'_B: y=4(x-2)$, $\quad t''_B: y=-4(x-2)$.

Si osserva altresì che nel punto di ascissa x=0 la funzione è derivabile e la retta tangente al grafico ha equazione y=4.