QUESTIONARIO

Quesito 4 (sulla funzione di densità di probabilità)

Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo [0;2] viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Risoluzione

Richiami teorici

Ricordiamo che la funzione $f(x)$ di densità di probabilità di una variabile casuale continua X, che assume valori nell'intervallo [a;b], è definita come la derivata prima della funzione di ripartizione F(x) associata alla v.c. in oggetto, risultando:

1) $F(x) = P(X \leq x)$, dove $P(X \leq x)$ è la probabilità che la v.c. X assuma un valore non superiore ad x;

2) la funzione di ripartizione è crescente e definita come segue

$$F(x) = \begin{cases} 0 & per \quad x < a \\ 0 \leq F(x) \leq 1 & per \quad a \leq x < b \\ 1 & per \quad x \geq b \end{cases}$$

3) La funzione di ripartizione F(x) e la funzione di densità di probabilità sono legate dalla relazione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

e risulta $\int_a^b f(t)dt = 1$.

In particolare si ha:

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)dt \, .$$

Con $x_1 < x_2$ risulta

$$\Pr(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

Osservazione - La probabilità che una v.c. continua assuma un particolare valore x appartenente all'intervallo [a;b] in cui varia è zero.

Sussiste il seguente

Teorema - Il differenziale del primo ordine della funzione di ripartizione dF(x)=F'(x)d x =f(x)d x, fornisce, a meno di infinitesimi di ordine superiore a dx, la probabilità che la v.c. continua X assuma un valore dell'intervallo [x; x+dx].

4) Valore medio - Il valore medio della v.c. X è dato $M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dt$

*** ***

Risoluzione del quesito

Premessa

Verifichiamo innanzitutto che la funzione $f(x)$ sia effettivamente una funzione di densità. La funzione deve verificare due proprietà:

1) nell'intervallo [0;2] deve essere non negativa, perché deve essere la derivata prima della funzione di ripartizione F(x) che è crescente;

2) l'integrale definito su [0;2] deve valere 1.

Prima proprietà

L'espressione della funzione si può scrivere nella forma seguente $f(x)=\frac{3}{4}x^2(2-x)$, da cui emerge che si annulla in x=0, x=2 e che nell'intervallo [0;2] è non negativa. La proprietà è soddisfatta.

Seconda proprietà

$$\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\left[\frac{x^3}{2}-\frac{3x^4}{16}\right]_0^2=\frac{8}{2}-\frac{3\cdot 16}{16}=1$$

La proprietà è soddisfatta.

a) Valore medio dei numeri generati

Il valore medio del generico numero X è

$$M(X)=\int_0^2 x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{4}x^4\right)dx=\left[\frac{3x^4}{8}-\frac{3x^5}{20}\right]_0^2=\frac{3\cdot 2^4}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)=12\cdot\frac{1}{10}=1,2$$

b) Rispondiamo alla domanda

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3?

La domanda posta richiede che si calcoli la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3, come dire, che lanciando il generatore di numeri casuali il primo numero generato sia proprio 4/3. Questa probabilità è zero. Spieghiamo perché. Il generatore di numeri casuali ogni volta che sarà lanciato genererà un numero appartenente all'intervallo [0;2], estremi compresi, ma la probabilità che si presenti un particolare numero dell'intervallo è zero. Questa è una caratteristica di ogni variabile casuale (v.c.) X che può assumere un qualsiasi valore di un intervallo [*a*;b], con *a*<b, comprese le v.c. che possono assumere qualsiasi valore reale[1]. Sono le cosiddette v.c. continue.

Osserviamo che se fossimo interessati all'evento:

E=<<Il generatore dei numeri casuali genera un numero x ≤4/3>>

la probabilità di quest'evento è

$$p = P\left(X \le \frac{4}{3} \right) = \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{3x^4}{16} \right]_0^{\frac{4}{3}} = \frac{4^3}{3^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{3} \right) = \frac{16}{27}$$

c) Rispondiamo alla domanda

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Consideriamo dunque l'evento

E=<< Il secondo numero estratto dal generatore di numeri casuali è minore di 1>>.

Quest'evento presuppone che nella generazione del primo numero casuale sia uscito un numero x compreso nell'intervallo [1;2]; l'evento E si verificherà se nel primo lancio del generatore sarà uscito un numero 1≤ x ≤ 2 e nel secondo lancio un numero x tale che 0≤ x < 1.

La probabilità che nella generazione del numero casuale x si abbia un numero minore di uno, è

$$P(X < 1) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{3x^4}{16} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16},$$

e la probabilità che ciò non si verifichi, quindi che si verifichi l'evento contrario è

$$P(1 \le X \le 2) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} = P(1 \le X \le 2)$$

La probabilità che si verifichi E è uguale alla probabilità che si verifichino entrambi gli eventi:

E'_1= <<Nel primo lancio esce un numero x compreso tra 1 e 2>>, che ha probabilità 11/16,

E'_2=<<il numero estratto nel secondo lancio è minore di 1>>, che ha probabilità 5/16.

I due eventi sono indipendenti, quindi la probabilità che si verifichino entrambi è il prodotto delle singole probabilità; dunque

$$P(E) = \frac{11}{16} \cdot \frac{5}{16} = \frac{55}{256}$$

[1] Come si precisa nell'Osservazione nei richiami teorici