

Questionario

Quesito 1

E' noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Stabilire se il numero reale u , tale che $\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = 1$ è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte.

$$A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx, \quad B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

Soluzione

Premettiamo che la funzione integranda $f(x) = e^{-x^2}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, assume valori positivi ed è pari; ciò implica che sussiste l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,8862... \quad (1.1)$$

Ciò premesso la funzione integrale

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx \quad (1.2)$$

per la positività della funzione integranda $f(x)$ è strettamente crescente ed essendo

$$\varphi(0) \approx 0,8862... < 1 = \int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = \varphi(u)$$

si deduce che deve risultare $0 < u$ (Figura 1).

$$\text{Calcolo dell'integrale } A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx$$

Il valore dell'integrale è zero perché la funzione integranda è dispari e l'intervallo $[-u; u]$ è simmetrico rispetto all'origine.

$$\text{Calcolo dell'integrale } B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx$$

Sfruttando la parità della funzione $f(x)$ e la proprietà additiva dell'integrale definito possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^u e^{-x^2} dx, \text{ da cui}$$

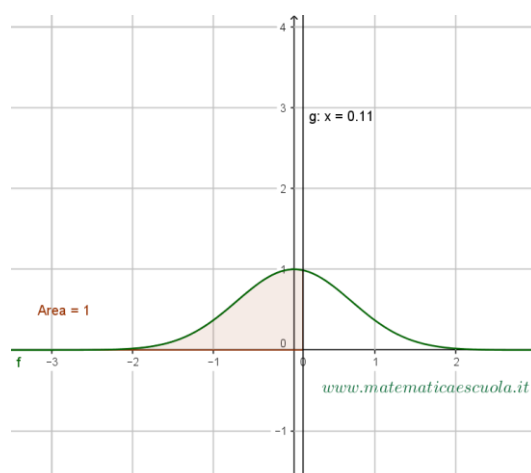


Figura 1

$$\int_0^u e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (1.3)$$

$$B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx = 2 \int_0^u e^{-x^2} dx = 2 - \sqrt{\pi} \quad (1.4)$$

Calcolo dell'integrale $C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$

Procediamo con una sostituzione di variabile.

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx, \text{ con } \sqrt{5}x = t \text{ si ha } dx = \frac{dt}{\sqrt{5}}, \text{ quindi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{5}}$$

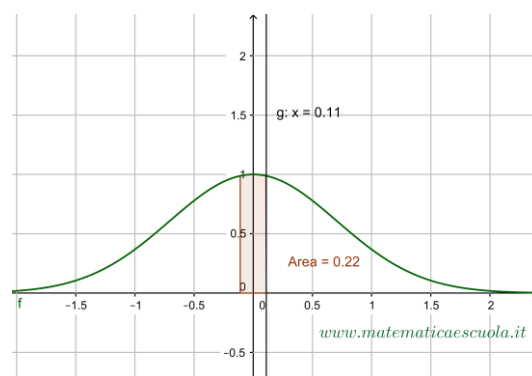


Figura 2- Nella figura è rappresentata la regione piana la cui area è $B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx$