

ex-Questionario della prova dell'Esame di Stato nel Liceo Scientifico, anno 2016, sessione ordinaria

Quesito 6 - Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h . Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è

dato da $V = \pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$.



Risoluzione

Strategia risolutiva

Il volume del liquido contenuto nel recipiente sferico è quello di un segmento sferico ad una base, di altezza h , relativo ad una sfera di raggio r . Il solido geometrico corrispondente può essere ottenuto con una rotazione completa di una parte di un cerchio di raggio r attorno ad un suo diametro. Per risolvere il quesito scriveremo l'equazione della circonferenza di diametro $2r$ ottenuta sezionando la superficie sferica tramite un piano diametrale, quindi determineremo una particolare funzione algebrica che sarà utilizzata nel calcolo dell'integrale definito per la determinazione del volume richiesto.

Elaborazioni

1) In un riferimento cartesiano ortogonale Oxy consideriamo la circonferenza λ di centro l'origine e raggio r , la cui equazione cartesina è $x^2 + y^2 = r^2$. Siano $A(0;-r)$, $B(0;r)$ gli estremi del suo diametro sull'asse y e $P(x;y)$ il suo generico punto. In Figura 1 abbiamo tracciato la retta tangente alla circonferenza in A e riportato su di essa la proiezione ortogonale P' di P , nonché la retta per P parallela all'asse delle ascisse che incontra in C l'asse y .

Osserviamo che la misura orientata del segmento $P'P$ è h e sussiste la relazione $\overline{P'P} = h = y + r$.

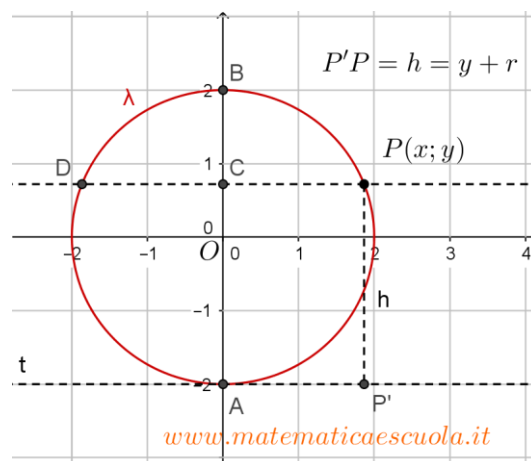


Figura 1

2) Considerando la parte di cerchio delimitata dall'arco AP , dal segmento PC e dal segmento CA , notiamo che il solido Σ corrispondente al volume del liquido contenuto nel recipiente sferico indicato nel problema si ottiene dalla rotazione completa attorno all'asse delle y dalla suddetta regione piana.

3) Dall'equazione della circonferenza, esplicitando x rispetto ad y , si ottiene l'equazione dell'arco APB . La forma algebrica è

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}, \text{ con } -r \leq y \leq r;$$

evidentemente x è il valore dell'ascissa del punto P .

Il calcolo del volume del solido richiesto è il risultato del seguente integrale definito

$$V(\Sigma) = \int_{y=-r}^{y_C} \pi \overline{CP}^2 dy = \int_{y=-r}^{y_C} \pi \left(\sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 dy = \pi \int_{y=-r}^{y_C} (r^2 - y^2) dy$$

Osserviamo ora che dalla relazione $h = y + r$, fissato il valore h , l'estremo superiore di integrazione è $y_C = h - r$ e in definitiva l'integrale da calcolare è

$$V(\Sigma) = \pi \int_{y=-r}^{h-r} (r^2 - y^2) dy = \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-r}^{h-r} = \frac{\pi}{3} \left[y(3r^2 - y^2) \right]_{-r}^{h-r} = \frac{\pi}{3} \left\{ (h-r) \left[3r^2 - (h-r)^2 \right] - (-r) \left[3r^2 - r^2 \right] \right\} =$$

$$\frac{\pi}{3} \left\{ (h-r)(2r^2 - h^2 + 2rh) + 2r^3 \right\} = \frac{\pi}{3} \left\{ \cancel{2r^2 h} - h^3 + 2rh^2 - \cancel{2r^3} + rh^2 - \cancel{2r^2 h} + \cancel{2r^3} \right\} = \pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$$