

QUESTIONARIO

Quesito n.10

Il diagramma di una funzione che divide in due regioni un rettangolo

10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}, x \geq 0$) divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici A(1;0), B(4;0), C(4;2) e D(1;2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Elaborazioni

La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è un'irrazionale intera ed ha come dominio l'intervallo $[0; +\infty[$. Il lato AB del rettangolo ABCD ha i punti di ascissa appartenente all'intervallo chiuso $[1;4]$ e il lato BC i cui punti hanno ordinata appartenente all'intervallo $[1;2]$ (vedere Figura 1).

Il diagramma della funzione attraversa il bordo del rettangolo ABCD nei due punti E(1;1), C(4;2) dividendo il rettangolo in due regioni, la prima è il trapezoide ABCEA, sottografico della curva $y=f(x)$ relativo all'intervallo $[1;4]$, la seconda è data dalla differenza tra tutto il rettangolo e il trapezoide suddetto. Siano S_1, S_2 le aree di dette regioni. Si richiede di calcolare il rapporto S_1/S_2 .

Il valore S_1 è dato dal risultato del seguente integrale definito

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{14}{3} = S_1$$

Poiché l'area del rettangolo vale

$$S = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 3 \cdot 2 = 6,$$

deduciamo che l'area della seconda regione è

$$S_2 = S - S_1 = 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$$

Valore del rapporto

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{14}{3} : \frac{4}{3} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Commento

Un esercizio di semplice esecuzione che permette di accertare il possesso delle conoscenze sul significato dell'integrale definito della funzione elementare $f(x) = \sqrt{x}$, limitatamente all'intervallo chiuso $[1;4]$ in cui la funzione è continua e positiva, nonché le corrispondenti abilità operative. Al fine di accertare il possesso di ulteriori conoscenze e competenze nel candidato sarebbe stato opportuno che l'autore del testo richiedesse anche di corredare la risoluzione del quesito con una rappresentazione grafica. Un'illustrazione grafica adeguata permette di fornire tante e tali informazioni di gran lunga superiori a quelle che può contenere una trattazione testuale.

Come **indice di difficoltà**, in una scala da 1 a 5, direi **fra 2 e 3**.

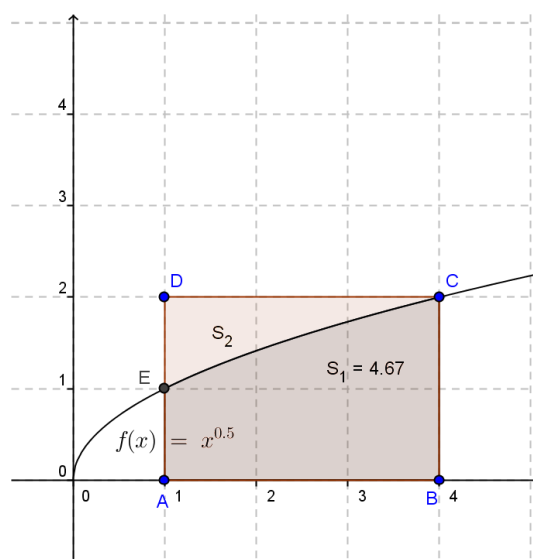


Figura 1- In figura sono rappresentate con colori diversi le due regioni in cui il diagramma della funzione divide il rettangolo ABCD e si fornisce il valore approssimato dell'area $S_1 = 14/3 \approx 4,67$.