QUESTIONARIO

Quesito n.7
Area di un poligono regolare inscritto in un cerchio e limite

7. Detta A(*n*) l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che $A(n)=\frac{n}{2}\cdot r^2\cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e calcolarne il limite per n→∞.

Risoluzione

Facciamo riferimento alla Figura 1.

La corda P_1P_2 sia il lato del poligono regolare di *n* lati inscritto nella circonferenza di raggio *r* e centro O, con $n\geq 3$. Congiungendo gli estremi P_1, P_2 con il centro O si ottiene un triangolo isoscele il cui angolo nel vertice O ha ampiezza $2\pi/n$ radianti. Conduciamo l'altezza OH_1 del triangolo relativa alla base P_1P_2; l'angolo acuto $\alpha=H_1OP_2$ ha ampiezza π/n. Dal triangolo rettangolo H_1OP_2 deduciamo che

$$\overline{H_1P_2}=\overline{OP_2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)=r\cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right);$$

$$\overline{OH_1}=\overline{OP_2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=r\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Possiamo calcolare l'area del triangolo P_1OP_2.

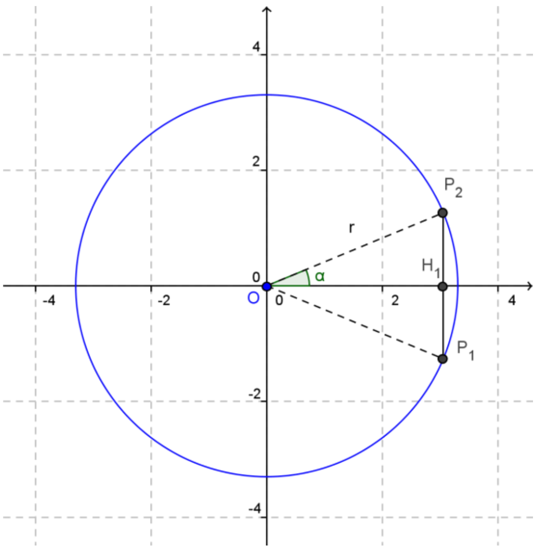

Figura 1

$$S\left(P_1OP_2\right)=\frac{1}{2}\cdot\overline{P_1P_2}\cdot\overline{OH_1}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\overline{H_1P_2}\cdot\overline{OH_1}=\overline{H_1P_2}\cdot\overline{OH_1}=r^2\cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

L'area A(*n*) del poligono regolare di *n* lati inscritto sarà *n* volte l'area del triangolo P_1OP_2, perciò risulta

$$A(n)=n\cdot r^2\cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ricordando la formula di duplicazione $sen(2\alpha)=2sen\alpha\cdot\cos\alpha$ possiamo scrivere ancora

$$A(n)=\frac{n}{2}\cdot r^2\cdot 2sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}\cdot r^2\cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Studio del limite

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot r^2\cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}r^2\cdot\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}r^2\cdot\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\cdot\pi=\pi r^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}$$

Con $\frac{2\pi}{n}=y$, se $n\to\infty$ allora $y\to 0$ e ricordando il limite notevole

$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$, con x espresso in radianti, possiamo scrivere

$$\pi r^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}=\pi r^2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{seny}{y}=\pi r^2\cdot 1=\pi r^2$$

Conclusione

L'area del poligono regolare di *n* lati inscritto nel cerchio di raggio r al tendere ad infinito del numero dei lati tende al valore dell'area del cerchio in cui è inscritto.