

QUESTIONARIO

Quesito n.4 Verifica di un'equazione differenziale

4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + xy'' = 1$$

$$xy' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 y'' + xy' + \frac{2}{x} = y$$

Risoluzione

Per risolvere il quesito si devono determinare le derivate prima e seconda della funzione e verificare se qualcuna delle quattro equazioni differenziali assegnate è soddisfatta.

Calcolo delle derivate

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$$

Verifica per la prima equazione

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y ? \quad \rightarrow \quad \frac{2 \ln x - 1}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^3} \quad \text{L'uguaglianza non è soddisfatta.}$$

Verifica per la seconda equazione

$$y' + xy'' = 1 ? \quad \rightarrow \quad \frac{1 - \ln x}{x^2} + x \left(\frac{2 \ln x - 1}{x^3} \right) = \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{L'uguaglianza non è soddisfatta.}$$

Verifica per la terza equazione

$$xy' = \frac{1}{x} + y ? \quad \rightarrow \quad x \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \quad \text{L'uguaglianza non è soddisfatta.}$$

Verifica per la quarta equazione

$$x^2 y'' + xy' + \frac{2}{x} = y ? \rightarrow x^2 \left(\frac{2 \ln x - 1}{x^3} \right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) + \frac{2}{x} = y, \text{ da cui si ha}$$

$$\frac{2 \ln x - 1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{x} \quad \text{L'equazione è soddisfatta.}$$

Si conclude che la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è una soluzione solo della quarta equazione differenziale.