

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + xy'' = 1$$

$$xy' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 y'' + xy' + \frac{2}{x} = y$$

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

6. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

determinare il minimo di f .

7. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r , verificare che

$$A(n) = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \text{ e calcolarne il limite per } n \rightarrow \infty.$$

8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm, 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di due cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

9. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}, x \geq 0$) divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici $A(1;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$ e $D(1;2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.