QUESTIONARIO

Quesiti n.1 e n.2

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

Risoluzione

1. La funzione $y = f(x)$ cercata è un polinomio di terzo grado giacché la sua derivata prima è un polinomio di secondo grado. Eseguendo l'integrale indefinito

$$\int f'(x)dx = \int\left(-2x^2 + 6\right)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + C,$$

con C costante arbitraria, si ottiene l'insieme delle primitive della funzione $f'(x)$. La funzione particolare da trovare è quella che in un punto del suo grafico nel secondo quadrante ha derivata prima coincidente con il coefficiente angolare della retta tangente nello stesso punto che è y=-2x+5. Imponiamo dunque che la funzione derivata prima valga -2 per x<0.

$f'(x) = -2x^2 + 6 = -2$ da cui $x^2 = 4$ e quindi $x = -2$.

Scopriamo che il punto di tangenza tra il grafico della funzione $y = f(x)$ e quello della retta y=-2x+5 deve avere ascissa x=-2; l'ordinata di detto punto si determina dalla conoscenza dell'equazione della retta tangente. Dunque

$$y(-2) = -2(-2) + 5 = 9 = f(-2)$$

Poiché risulta $f(-2) = -\frac{2}{3}(-2)^3 + 6(-2) + C = -\frac{20}{3} + C$, deve aversi $-\frac{20}{3} + C = 9$, da cui $C = \frac{47}{3}$.

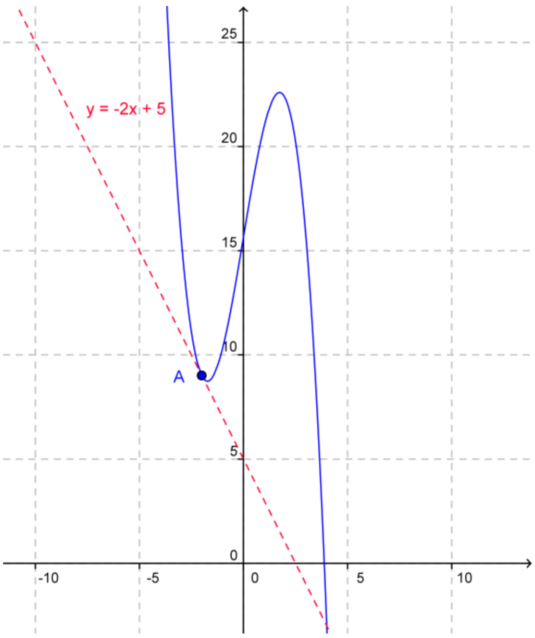

Figura 1

La funzione cercata è $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$

In **Figura 1** sono rappresentati il diagramma della funzione y=f(x) e la retta tangente alla stessa curva nel punto A(-2;9).

***

2. La dimostrazione del quesito si potrebbe fornire operando con le figure geometriche connesse lavorando nello spazio euclideo tridimensionale. Il procedimento non è brevissimo e tuttavia, considerato che stiamo risolvendo un quesito assegnato nell'Esame di Stato, possiamo sfruttare il calcolo integrale per determinare il volume del solido di rotazione descritto dal sottografico di una particolare retta relativamente ad un intervallo [a;b] che ruota di un giro completo intorno all'asse delle ascisse.

Nel piano cartesiano Oxy consideriamo la retta g che passa per i punti A(0;r) e B(h;R), dove r,R, h sono i parametri presenti nella formula del volume del tronco di cono fornita nel testo del quesito. L'equazione cartesiana della retta g è la seguente

$g : \dfrac{x}{h} = \dfrac{y-r}{R-r}$, da cui si ottiene $g : y = \dfrac{x}{h}(R-r)+r$.

Il tronco di cono di cui occorre trovare il volume V è descritto da una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse dal trapezio rettangolo ABCO rappresentato in Figura 2 ed il valore del volume è il risultato del seguente integrale definito:

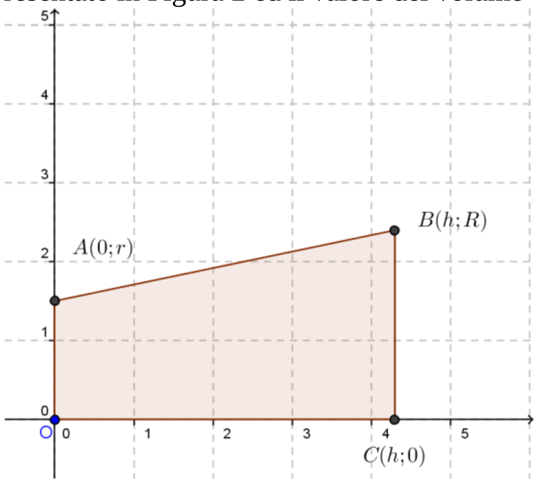

Figura 2

$$V = \int_{x=0}^{h} \pi \left[\frac{x}{h}(R-r)+r \right]^2 dx =$$

$$\pi \int_{x=0}^{h} \left[\frac{x^2}{h^2}(R-r)^2 + \frac{2x}{h}(R-r)r + r^2 \right] dx =$$

$$\pi \left[\frac{x^3}{3h^2}(R-r)^2 + \frac{x^2}{h}(R-r)r + r^2 x \right]_0^h =$$

$$\pi \left[\frac{h^3}{3h^2}(R-r)^2 + \frac{h^2}{h}(R-r)r + r^2 h \right] =$$

$$\pi \left[\frac{h}{3}(R-r)^2 + h(R-r)r + r^2 h \right] =$$

$$\frac{\pi h}{3}\left[(R-r)^2 + 3(R-r)r + 3r^2 \right] = \frac{\pi h}{3}\left[R^2 - 2R\mathrm{r} + \mathrm{r}^2 + 3Rr - 3r^2 + 3r^2 \right] = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + \mathrm{r}^2 + Rr \right)$$

La formula è acquisita.