

M557- Esame di Stato di Istruzione Secondaria Superiore

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 – SCIENTIFICO Opzione Scienze Applicate

Tema di: MATEMATICA

Problema 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:



Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y , e dalla retta $x=6$; la porzione etichettata con la “Z”, rappresenta un’area non coperta dal segnale telefonico dell’operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando⁽¹⁾ che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell’operatore compare la seguente affermazione: “nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio”; verifica se effettivamente è così.

L’operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegate il significato nella situazione concreta.

Elaborazioni

1. La funzione che rappresenta la spesa totale nel mese relativa ad x minuti di conversazione è

$f(x) = 10 + \frac{1}{10}x$, in euro. Il costo medio $g(x)$ per ogni minuto di conversazione è il rapporto tra il costo totale ed il numero dei minuti x di conversazione, dunque risulta $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{10}{x} + \frac{1}{10}$.

Diagrammi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$

La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \geq 0$, mentre la funzione $g(x)$ è definita solo per $x > 0$.

La funzione $f(x)$ è strettamente crescente nel suo dominio e il suo diagramma è una semiretta; la funzione assume il minimo assoluto per $x=0$ ed il valore è 10€. Il valore rappresenta il costo totale (fisso) nel mese in assenza di conversazioni telefoniche. La funzione non ha evidentemente massimo; il suo estremo superiore è $+\infty$.

La funzione $g(x)$ ha come diagramma un ramo di iperbole equilatera, è strettamente decrescente nel dominio di definizione, non presenta alcun punto di massimo, né di minimo relativo. L’estremo superiore è $+\infty$ e l’estremo inferiore è 0,1. L’asse delle ordinate è asintoto verticale da destra e la semiretta $y=1/10$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. La stretta decrescenza della funzione indica che il costo medio per ogni minuto di conversazione diminuisce con l’aumentare del numero dei minuti di conversazione;

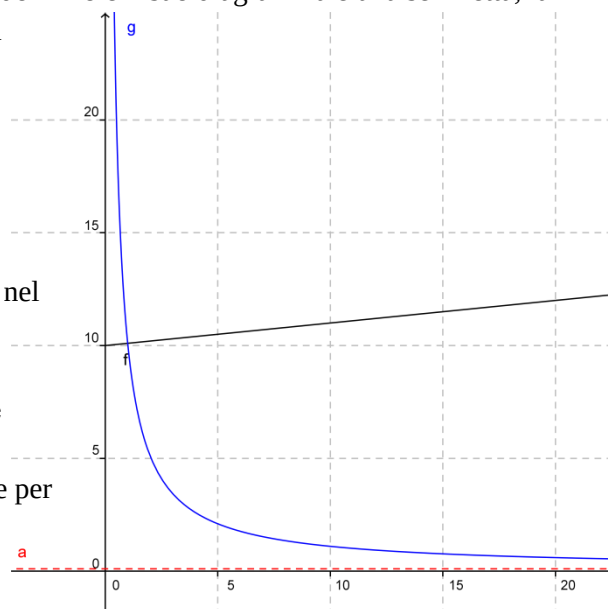


Figura 1

⁽¹⁾ Immagino che l’autore del problema volesse scrivere “richiedendo” in luogo di “verificando”

l'andamento asintotico della curva rispetto all'asintoto orizzontale indica che con l'aumentare progressivo dei minuti di conversazione il costo medio di conversazione per ogni minuto tende a stabilizzarsi verso il valore medio di 0,1€.

2. Sia x_0 il numero di minuti di conversazione già utilizzati nel mese corrente, dunque

$$g(x_0) = \frac{10}{x_0} + \frac{1}{10}. \text{ Si deve trovare per quale numero } x_1 \text{ di minuti di conversazione è soddisfatta}$$

l'uguaglianza

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}, \text{ cioè } \frac{10}{x_1} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{x_0} + \frac{1}{10} \right). \text{ Risolvendo rispetto ad } x_1 \text{ si ha}$$

$$x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}$$

Osserviamo che essendo $x_0 > 0$ risulta anche $g(x_0) > 0$, quindi anche $g(x_1) > 0$; ciò è ovvio visto che $x_1 > 0$. Dall'espressione di x_1 deduciamo che può risultare solo $0 < x_0 < 100$

. La funzione $x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}$ è definita solo

nell'intervallo aperto $]0; 100[$ ed ha come asintoto verticale da sinistra la retta $x_0 = 100$.

La presenza dell'asintoto verticale indica che se il numero dei minuti x_0 già utilizzati nel mese si avvicina a 100 praticamente non è possibile determinare il numero complessivo di minuti (x_1) di utilizzo in modo che il costo medio al minuto diventi la metà di quello realizzato con x_0 minuti utilizzo della rete telefonica già contabilizzati⁽²⁾. Il diagramma della funzione è in Figura 2.

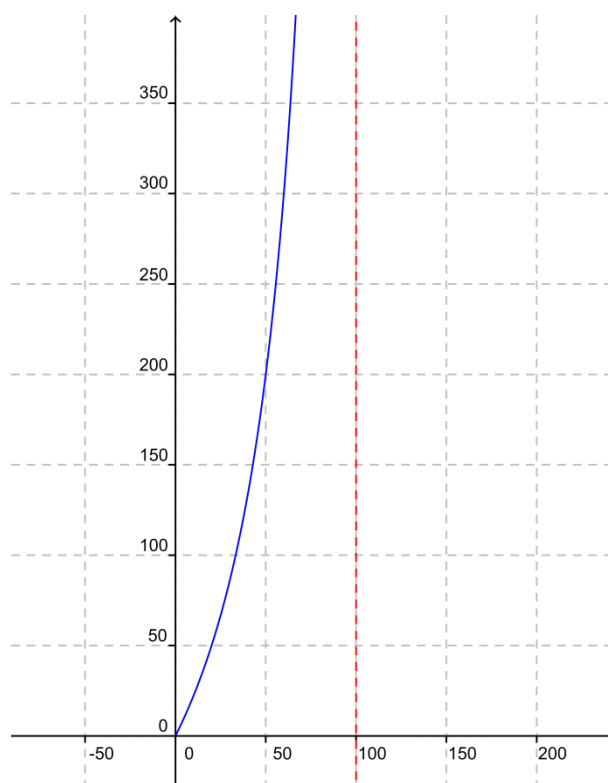


Figura 2

3. Dalle indicazioni del testo si evince che il margine superiore della zona di interesse per il segnale telefonico è un arco di parabola e dalla disposizione degli assi cartesiani quest'ultima deve avere equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$. Si trovano i valori dei coefficienti a , b , c imponendo che l'equazione della curva sia soddisfatta dalle coordinate dei tre punti indicati sulla mappa

$$A(0; 2), B\left(2; \frac{7}{2}\right), C(4; 4). \text{ Si deve risolvere il seguente sistema di equazioni}$$

⁽²⁾ Confrontare quanto riportato nel commento al problema per altre considerazioni

$$\begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b + c = \frac{7}{2} \\ 16a + 4b + c = 4 \end{cases}, \text{ dal quale si ottiene } \left(a = -\frac{1}{8}; b = 1; c = 2 \right).$$

L'equazione della parabola è $y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$; il punto C ne è il vertice.

Verifica della dichiarazione del gestore telefonico

Si deve calcolare l'area coperta dal segnale, data dalla differenza tra il sottografico della parabola relativamente all'intervallo $[0;6]$ e l'area della zona "Z", che è un triangolo rettangolo isoscele di area 0,5 e considerarne il rapporto con l'area del sottografico indicato; il valore del rapporto deve essere pari al 96%=0,96.

Area del sottografico

Il valore dell'area in oggetto è il risultato del seguente integrale definito

$$I = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^6 = -9 + 18 + 12 = 21$$

L'area della regione dichiarata coperta dal segnale telefonico è $S = I - \text{Area}("Z") = 21 - 0,5 = 20,5$

e rispetto al sottografico della parabola rappresenta la percentuale

$20,5 : 21 \approx 0,976 = 97,6\%$, leggermente superiore al valore dichiarato dal gestore del servizio.

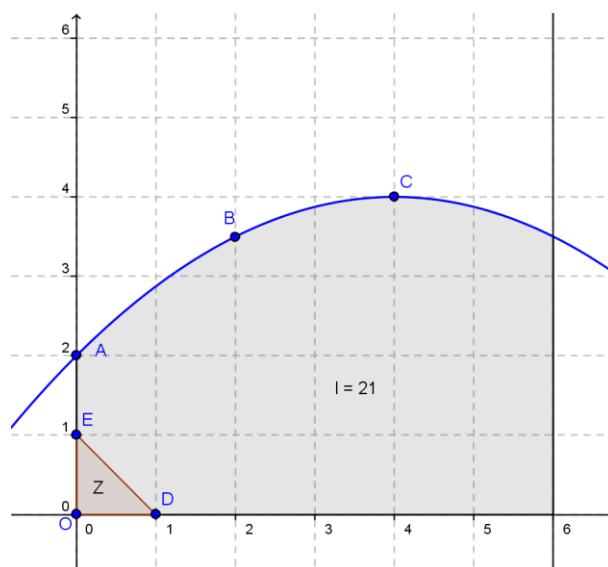


Figura 3

4. (Nuove condizioni per il servizio telefonico)

La funzione del costo totale ora è così definita

$$f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{1}{10}x & \text{per } 0 \leq x \leq 500 \\ \frac{1}{5}x - 40 & \text{per } x > 500 \end{cases}$$

Infatti, per i primi 500 minuti non cambiano le condizioni, mentre per i successivi, quindi con $x > 500$, si aggiunge al “costo base” $10 + \frac{1}{10}x$ il **sovrapprezzo** di 0,1€ per ogni minuto di conversazione.

La funzione del costo totale per $x > 500$ è dunque

$$\text{costo base} + \text{il sovrapprezzo} = \left(10 + \frac{1}{10}x\right) + \frac{1}{10}(x - 500) = \frac{1}{5}x - 40.$$

L'espressione della funzione $g(x)$ del costo medio al minuto è

$$g(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{1}{10} & \text{per } 0 < x \leq 500 \\ \frac{1}{5} - \frac{40}{x} & \text{per } x > 500 \end{cases}.$$

Monotonia, continuità e derivabilità delle due funzioni $f(x)$, $g(x)$

Per la funzione $f(x)$

- E' continua e strettamente crescente nel suo dominio; ammette minimo assoluto per $x=0$ ed è 10€, ma è illimitata superiormente: $\text{Sup}(f)=+\infty$.
- E' derivabile in ogni punto del dominio diverso da 500; quest'ultimo è angoloso. La funzione derivata prima è così definita

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{per } 0 \leq x < 500 \\ \frac{1}{5} & \text{per } x > 500 \end{cases}$$

- Il diagramma della funzione è in Figura 4.

Per la funzione $g(x)$

- E' continua nel suo dominio $]0;+\infty[$.
- E' derivabile in ogni punto $x \neq 500$ del dominio; in $x=500$ presenta un'angolosità. La funzione derivata prima è così definita:

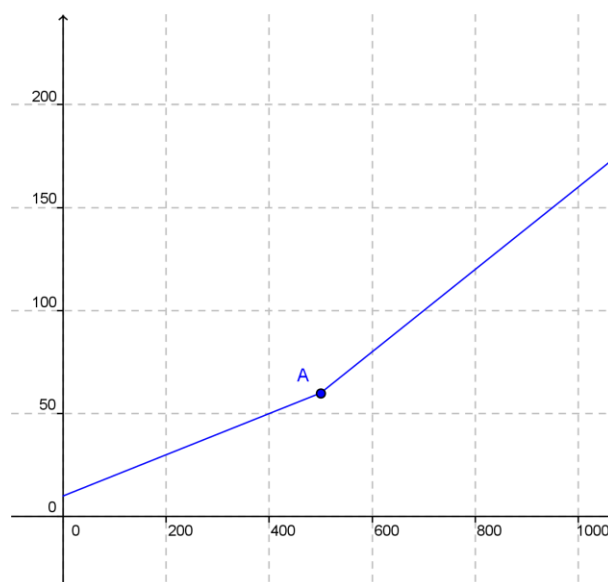


Figura 4- Diagramma della funzione $y=f(x)$ con la condizione del sovrapprezzo oltre i 500 minuti di conversazione

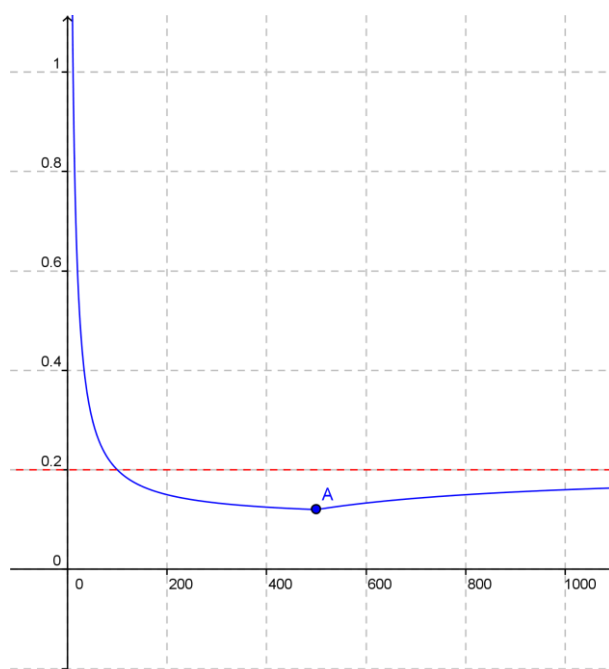


Figura 5- Diagramma della funzione $g(x)$ relativa al costo medio per ogni minuto di conversazione. La funzione assume il minimo assoluto in $x=500$ ed il valore è 0,12€/min.

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{10}{x^2} & \text{per } 0 < x < 500 \\ \frac{40}{x^2} & \text{per } x > 500 \end{cases}$$

- E' strettamente decrescente nell'intervallo $]0;500[$ e strettamente crescente nell'intervallo $]500;+\infty[$; il punto $x=500$ è di minimo assoluto con $g(500)=0,12$. Dal significato di $g(x)$ si deduce che il generico cliente del gestore telefonico realizza il costo medio minimo per ogni minuto di conversazione solo se nel mese occupa la rete telefonica esattamente per 500 minuti. Ogni altro utilizzo comporta un costo medio al minuto superiore a 0,12€/min. Per un numero di minuti notevolmente superiore a 500 il costo medio complessivo tende a stabilizzarsi verso il valore asintotico di 0,20€/minuto.
- Il diagramma della funzione è in Figura 5.
