QUESTIONARIO

Quesito 7

Se $f'(x)=\ln x-x+2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x, f ha un minimo relativo?

(A) 5,146 (B) 3,146 (C) 1,000 (D) 0,159 (E) 0

Soluzione

La funzione $y=f(x)$, di cui si conosce l'espressione della funzione derivata prima, ha come dominio di definizione l'intervallo]0;+∞[. Se una funzione assume un minimo o un massimo relativo in un punto interno al dominio di definizione in cui sia derivabile necessariamente in detto punto si deve annullare la derivata prima (teorema di Fermat); in ogni caso lo studio del segno della derivata prima permette di stabilire gli intervalli di monotonia della funzione. Studiamo allora la disequazione

$f'(x)=\ln x-x+2\geq 0$, equivalente alla seguente

$\ln x\geq x-2$ (*)

Ricorriamo al confronto grafico delle funzioni $y=\ln x$, $y=x-2$, i cui diagrammi rispettivamente γ_1, γ_2 sono rappresentati in Figura 1.

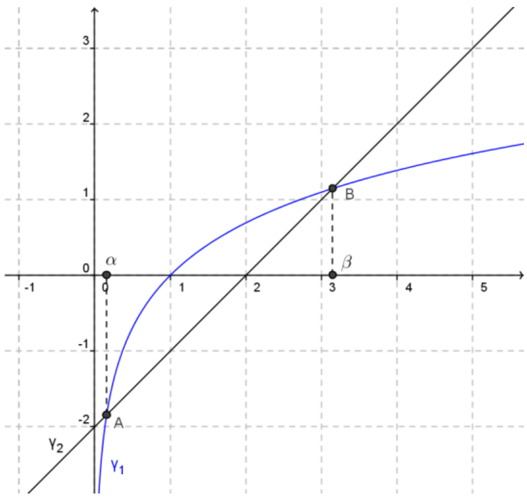

Figura 1

Osserviamo che le due curve hanno due punti di intersezione di ascisse α, β, con $0<\alpha<1$ e $\beta>3$. Dal grafico emerge che internamente all'intervallo]α;β[risulta $\ln x>x-2$, quindi in esso $f'(x)>0$ e perciò la funzione $y=f(x)$ è strettamente crescente, mentre in ciascuno degli intervalli]0;α [,] β;+∞[risulta $\ln x<x-2$, cioè $f'(x)<0$, dunque in ciascuno di essi la funzione è strettamente decrescente; da queste considerazioni si deduce che i punti $x=\alpha$, $x=\beta$ per la funzione $y=f(x)$ sono rispettivamente di minimo e di massimo relativo.

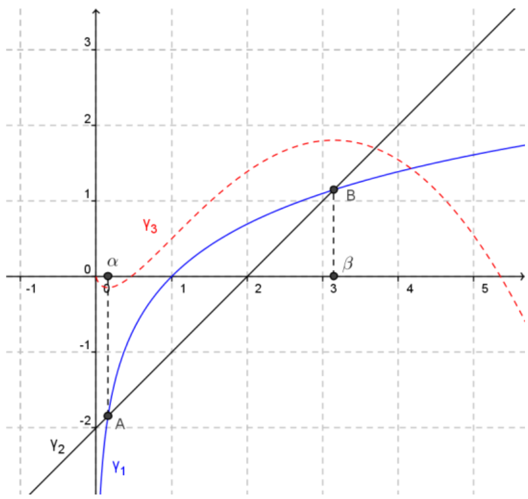

Figura 2

A questo punto prendendo in esame i punti

x_1=5,146 ; x_2=3,146 ; x_3=1,000 ; x_4=0,159 ; x_5=0 si riconosce che nel punto x_4=0,159 la funzione $y=f(x)$ ha un minimo relativo. Concludiamo che l'alternativa esatta tra quelle proposte è la (D).

Approfondimento

Possiamo fornire un'espressione della funzione $y = f(x)$ eseguendo l'integrale indefinito

$$\int(\ln x - x + 2)\,dx = \int(\ln x)\,dx + \int(-x+2)\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx - \frac{x^2}{2} + 2x = x\ln x + x - \frac{x^2}{2} + c$$

Scegliendo come costante reale c=0 si ha la funzione $y = f(x) = x\ln x + x - \frac{x^2}{2}$ il cui diagramma γ_3 è rappresentato con stile tratteggio in Figura 2.