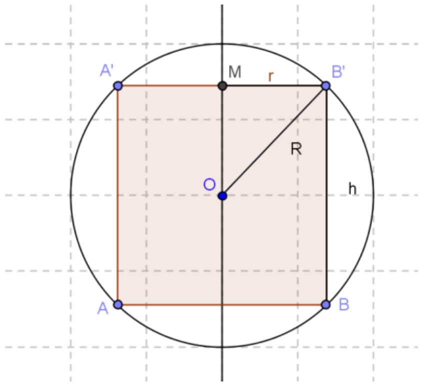
QUESTIONARIO

Quesito 6

Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$.

Soluzione

Facciano riferimento alla figura bidimensionale riportata a lato. Il cilindro circolare inscritto determina con il piano del foglio il rettangolo ABB'A'.



Con $\overline{AB} = 2r$, $\overline{AB'} = 2R$, $\overline{BB'} = h$, risulta $\frac{h}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Il volume del cilindro inscritto vale

$$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

Possiamo considerare il volume in funzione della misura r $\in$[0;R] e trovare per quale valore di r assume il valore massimo.

Determiniamo la funzione derivata prima e studiamone segno e zeri.

$$V' = 2\pi\left[2r\sqrt{R^2 - r^2} + r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot (-2r)\right] = \ldots = \frac{2\pi r\left(2R^2 - 3r^2\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Con r=0 il cilindro si riduce ad un segmento, quindi ha volume zero; con r>0 risulta

$2R^2 - 3r^2 = 0$ se e solo se $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Del resto, con $0 < r < R\sqrt{\frac{2}{3}}$ la derivata prima è positiva quindi la funzione $V(r)$ è strettamente, mentre per $R\sqrt{\frac{2}{3}} < r < R$ la funzione derivata prima è negativa e la funzione volume è strettamente decrescente, dunque $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ è punto di massimo relativo e assoluto e risulta

$$\mathrm{V}_{\max} = 2\pi\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2} = 2\pi \cdot \frac{2}{3}R^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}R = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$$

Tenendo conto che $R = \sqrt{3}$ si ottiene $\mathrm{V}_{\max} = 4\pi$. Per quanto concerne le misure del raggio r e dell'altezza h si ha

$$r = R\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}, \quad h = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2\sqrt{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} = 2$$