

Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di:MATEMATICA

Problema 2

Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy ; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x . Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y , passante per l'origine e tangente a γ in P .
3. Sia R la regione piana delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0;1]$. Si calcoli l'area di R , illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro.
4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y=-1$.

*** **

Commento

- 1) Lo studio della funzione logaritmica non presenta insidie. Risulta semplice determinare il dominio, il segno e l'unico zero. Nello studio dei limiti nei due punti $x=0$, $x=+\infty$ (di frontiera del dominio) qualche impegno concettuale è richiesto per il primo perché si presenta la forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Lo studente che conosca il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \log_a(x) = 0, \text{ per } \forall r > 0 \text{ e } \forall a > 0 \text{ e } a \neq 1,$$

avrà velocizzato lo studio, diversamente, lo studio può essere affrontato con la regola di de l'Hôpital, dopo averlo ricondotto alla forma ∞/∞ . E' importante, comunque sottolineare, che in un caso o nell'altro lo studente deve aver giustificato l'applicabilità della procedura seguita.

Risultano anche veloci lo studio della monotonìa, la determinazione del punto di minimo (assoluto) $x = e^{-\frac{1}{3}} = 0,7165313... \approx 0,717$, lo studio della concavità e della convessità e l'individuazione dell'unico punto di flesso $x = e^{-\frac{5}{6}} = 0,4345982... \approx 0,435$.

In riferimento alle ascisse del punto di minimo e del punto di flesso ammessi dal diagramma della funzione, sembra "abbastanza rassicurante" la richiesta << se ne

calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale>>, come dire, non preoccupatevi eccessivamente della modalità di calcolo dei due valori e limitatevi all'utilizzo di una calcolatrice (ovviamente del tipo ammesso nello svolgimento della prova, così come indicato nella consueta nota” **È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile** “ riportata nel piè di pag.2 del testo ministeriale). Per quanto riguarda invece le ordinate dei suddetti punti, non c'era bisogno che fosse esplicitamente richiesto il calcolo, perché, considerato che lo studente doveva tracciare il diagramma della funzione, certamente avrebbe eseguito i calcoli necessari avendone tutto l'interesse a determinarne i relativi valori per posizionare i due punti nel riferimento cartesiano. Bene ha fatto l'estensore del problema a non richiedere esplicitamente i valori delle ordinate e ritenuto, a mio avviso, di lasciare spazio all'autonomia decisionale del candidato sul da farsi. Per chiudere, immagino che i candidati che abbiano fornito i valori delle ordinate dei suddetti punti, per garantire l'uniformità del lavoro, avranno comunicato i valori arrotondati alla terza cifra decimale (l'eleganza di un elaborato emerge anche da queste piccole attenzioni).

2. Quesito “Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x . Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y , passante per l'origine e tangente a γ in P ”.

Raccordo tra geometria analitica e analisi.

Per risolvere il quesito il candidato deve

- conoscere la forma algebrica dell'equazione della parabola da cercare $y=ax^2+bx$ ([conoscenza di geometria analitica](#));
- sapere che il valore della derivata prima di una funzione $y=f(x)$ in un punto x_0 , in cui la stessa è derivabile, rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma della funzione nel punto $P(x_0;f(x_0))$ e saper trovare l'equazione della suddetta retta ([conoscenza di analisi](#));
- avere chiaro il concetto che la parabola da cercare e il diagramma della funzione $f(x)=x^3\ln(x)$ hanno nel punto $P(1;0)$ la stessa retta tangente (capacità di sintesi di concetti di geometria analitica e di analisi).

Mettendo insieme i vincoli per il soddisfacimento delle proprietà richieste dalla parabola si determinano i valori dei due parametri $a=1$, $b=-1$ ottenendo l'equazione della curva $\lambda: y = x^2 - x$.

I calcoli necessari sono piuttosto semplici, ma quello che conta in questo quesito è che il candidato dimostri di possedere le conoscenze e le competenze indicate e che le sappia gestire dal punto di vista operativo.

3. Quesito - “Sia R la regione piana delimitata da γ e dall’asse x sull’intervallo aperto a sinistra $]0;1]$. Si calcoli l’area di R , illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l’unità di misura lineare pari a 1 decimetro.”

Utilizzo del calcolo integrale.

Osserviamo subito che la regione piana di cui si deve determinare l’area è finita e per il calcolo del valore richiesto si deve ricorrere all’applicazione del calcolo integrale, precisamente, si deve affrontare un **integrale improprio**. Infatti, la funzione $f(x)=x^3\ln(x)$ in esame non è definita in tutto l’intervallo chiuso $[0;1]$, perché non lo è nel punto $x=0$. Considerato, inoltre che nell’intervallo $]0;1[$ è negativa, per il calcolo dell’area si deve calcolare l’integrale definito

$$\int_{\varepsilon}^1 -x^3 \ln(x) dx, \text{ con } 0 < \varepsilon < 1,$$

successivamente studiare il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 -x^3 \ln(x) dx$$

e se il valore ottenuto sarà finito, il risultato rappresenterà l’area della regione R .

Si ottiene

$$\int_{\varepsilon}^1 -x^3 \ln(x) dx = \left[-\frac{x^4}{4} \cdot \ln(x) + \frac{x^4}{16} \right]_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{16} + \frac{\varepsilon^4}{4} \cdot \ln(\varepsilon) - \frac{\varepsilon^4}{16}$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{16} + \frac{\varepsilon^4}{4} \cdot \ln(\varepsilon) - \frac{\varepsilon^4}{16} \right) = \frac{1}{16}$$

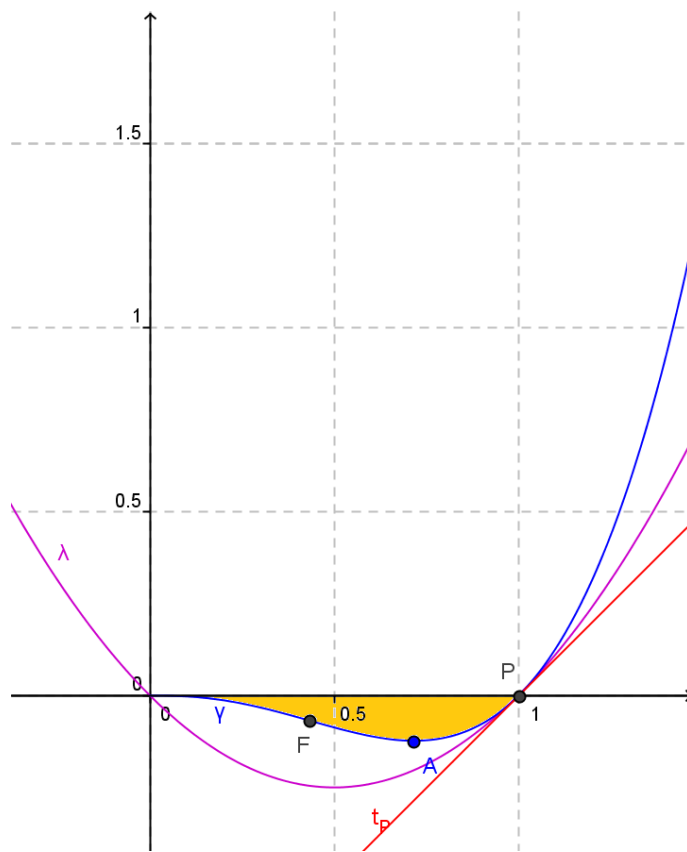
La regione piana in oggetto ha dunque Area=1/16.

Facciamo notare che nello studio del limite si presenta ancora il limite notevole ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \log_a(x) = 0$$

già utilizzato nello sviluppo del precedente quesito n.1.

La questione dell’unità di misura insita nella richiesta “...si esprima (l’area della regione R) in mm^2 avendo supposto l’unità di misura lineare pari a 1 decimetro.”



rappresenta una buona occasione per rendere consapevole lo studente dell'intensità della grandezza determinata ($\text{Area}=625\text{mm}^2$) e nello stesso tempo verificare il possesso delle abilità necessarie per trasformare il valore di una grandezza nel sistema metrico decimale.

4. Il quesito

“Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione.

Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y=-1$ “

mira a verificare se il candidato sa gestire la simmetria assiale applicata al diagramma della funzione oggetto di studio $f(x) = x^3 \ln x$ e richiede l'applicazione della procedura per due volte, con l'individuazione della curva simmetrica rispetto all'asse y e di quella simmetrica rispetto alla retta $y=-1$. Nulla di eccezionale.

Conclusione

Un problema che permette al candidato di esprimere il possesso di buona parte delle conoscenze che ha acquisito con lo studio dell'analisi matematica (tema trattato principalmente nel corso dell'ultimo anno di liceo) e di raccordarlo con una parte del programma di geometria analitica (limitatamente alla retta, alla simmetria assiale e alla parabola).

*** **