

Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

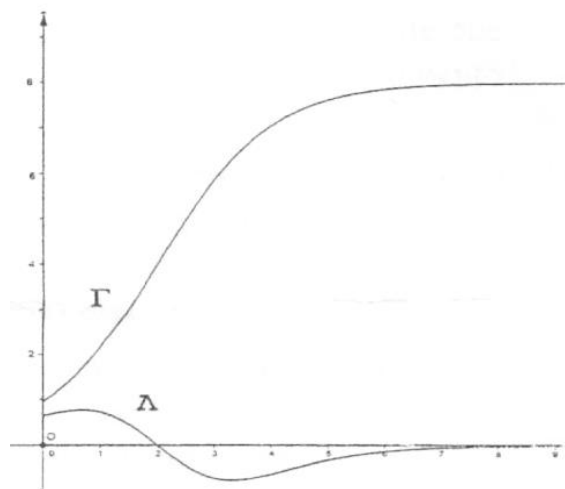
Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di:MATEMATICA

Problema 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0;+\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2;4)$, passa per $(0;0)$, mentre le rette $y=8$ e $y=0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ , rispettivamente.

- 1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è: $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è un possibile andamento di $f(x)$?
- 2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?



- 3) Se Γ è il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{b-x}}, \text{ si provi che } a=8 \text{ e } b=2.$$

- 4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0;2]$.

Commento

- 1) Senza dubbio interessante è la richiesta di riconoscere che la funzione derivata prima della funzione $y=f(x)$ ammette un punto di massimo di cui si richiedono anche le coordinate. L'obiettivo si consegue effettuando un lavoro di sintesi non indifferente. Infatti, in primo luogo osserviamo che dall'andamento del diagramma della funzione derivata seconda $y=f''(x)$ si deduce che il suo zero $x=2$ è di massimo relativo proprio per la funzione derivata prima $y=f'(x)$ perché:

in un opportuno intorno completo $I(2)$ di tale punto la derivata seconda è positiva a sinistra e negativa a destra, pertanto la funzione derivata prima, limitatamente

all'intervallo $I(2)$, è crescente a sinistra di $x=2$ e decrescente a destra dello stesso, dunque il punto $x=2$ è di massimo relativo per la funzione.

Evidentemente lo studente per riuscire a caratterizzare il punto $x=2$ come punto di massimo per la funzione derivata prima deve essere a conoscenza che il segno positivo della derivata prima $y=\varphi'(x)$ di una funzione $y=\varphi(x)$ in un certo intervallo implica che nello stesso intervallo la funzione $y=\varphi(x)$ è strettamente crescente⁽¹⁾. Nel caso in esame la funzione $y=\varphi(x)$ coincide con $y=f'(x)$ e la funzione $y=\varphi'(x)$ coincide con $y=f''(x)$. Lo studente è stato chiamato quindi ad applicare un certo teorema dovendo distinguere attentamente quali fossero le funzioni cui andava applicato.

In secondo luogo, per determinare l'ordinata del punto di massimo per la funzione derivata prima $y=f'(x)$ è stato necessario sfruttare l'informazione contenuta nel testo del problema “La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2;4)$, passa per $(0;0)$...”.

Osserviamo che per sfruttare opportunamente e consapevolmente detta informazione sarebbe stato opportuno che lo studente precisasse perché il punto $F(2;4)$ fosse di flesso per il diagramma Γ della funzione e successivamente che intuisse che attraverso l'equazione della retta tangente inflessionale a Γ poteva arrivare a determinare l'ordinata del punto di massimo, cioè $f'(2)$.

Riuscire a mettere a frutto due conoscenze, certamente è una dimostrazione del possesso di competenze specifiche, a mio avviso, di buon livello.

2) Cosa indicano la presenza dell'asintoto orizzontale e l'esistenza del punto di flesso?

Quesiti interessanti.

Dato per scontato che il diagramma della funzione rappresenta il modello di crescita di una certa popolazione, la presenza dell'asintoto orizzontale e la stretta crescita della funzione indicano che la numerosità della popolazione cresce in tutto l'intervallo temporale $]0;+\infty[$ e il valore tende a stabilizzarsi verso la quota dell'asintoto ($y=8$).

D'altra parte, la presenza del punto di flesso $F(2;4)$ e la stretta crescita della funzione indicano che il ritmo di crescita della popolazione è più veloce nell'intervallo $]0;2[$ e meno veloce nell'intervallo $]2;+\infty[$; il valore massimo del ritmo di crescita si ha per $x=2$.

I quesiti sono interessanti perché, a mio avviso, offrono al candidato la possibilità di dimostrare che “sa leggere un grafico specifico” e possibilmente chiarire che una popolazione che cresce continuamente non necessariamente deve superare un qualsiasi valore numerico comunque fissato. In questa affermazione è implicito il concetto di **estremo superiore di un insieme numerico**.

⁽¹⁾ Aggiungiamo che questa proprietà per le funzioni monotone è una diretta conseguenza del Teorema di Lagrange.

- 3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \frac{a}{1+e^{b-x}}$, si provi che $a=8$ e $b=2$.

Osserviamo che per la **determinazione di a** si può sfruttare la conoscenza dell'asintoto orizzontale. Infatti, il candidato attento osserva che per $x \rightarrow +\infty$ la funzione proposta come modello tende ad a , e il diagramma tende alla retta $y=8$, quindi deve essere $a=8$.

La determinazione del valore **parametro b** è immediata se si sfrutta il passaggio della curva dal suo punto di flesso $F(2;4)$, lo è meno se si sfrutta l'informazione già acquisita sulla derivata prima $f'(2) = 2$.

Anche questo quesito permette di verificare il possesso di alcune conoscenze e competenze (significato geometrico di asintoto orizzontale, caratteristiche geometriche della funzione di base e^{-x} , della derivata di un quoziente e di una funzione esponenziale).

- 4) Il calcolo dell'area richiesta non presenta alcuna difficoltà se si tiene conto che occorre una primitiva della funzione integranda (della funzione derivata seconda). Come primitiva si può assumere la funzione derivata prima della funzione $y=f(x)$, cioè

$$f'(x) = \frac{8 \cdot e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2} \text{ (applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale).}$$

In ogni caso anche per questo quesito il candidato deve riflettere sul da farsi; non si tratta di un semplice esercizio in cui calcolare un integrale definito di una funzione già assegnata.