

Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a , b e h , illustrando il ragionamento seguito.

Soluzione

Sia $ABCD A'B'C'D'$ il tronco di piramide in esame e siano O ed O' rispettivamente i centri delle basi $ABCD$, $A'B'C'D'$. Poniamo per brevità $\overline{AB} = a$, $\overline{A'B'} = b$, $\overline{OO'} = h$. Il tronco di piramide appartiene alla piramide di vertice V e base $ABCD$. Poniamo ancora $\overline{O'V} = h'$.

Osserviamo che il quadrato $A'B'C'D'$ è l'intersezione del piano passante A' e parallelo alla base $ABCD$ con la piramide $VABCD$.

È noto che le aree dei quadrati $ABCD$, $A'B'C'D'$ stanno tra loro come i quadrati delle loro distanze dal vertice V . Tenendo conto dei simboli introdotti sussiste dunque la seguente proporzione

$$a^2 : b^2 = (h+h')^2 : h'^2 \quad (1)$$

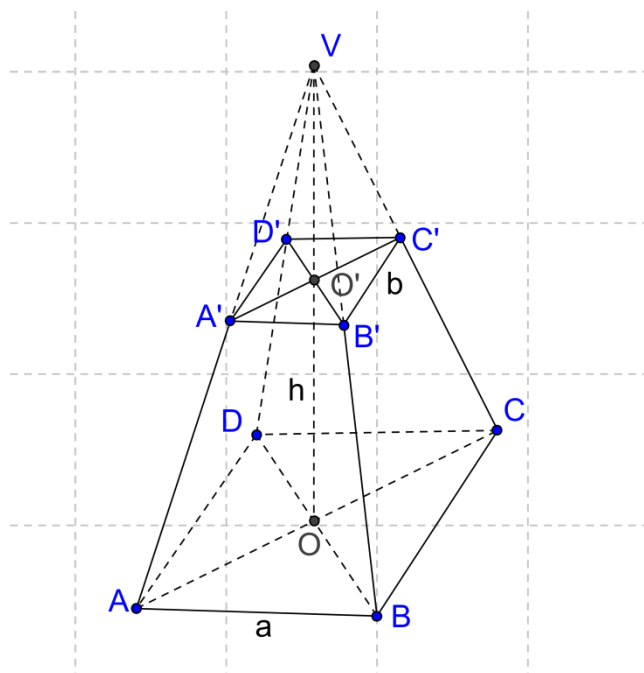
da cui $a : b = (h+h') : h'$, ed ancora

$$\frac{h+h'}{h'} = \frac{a}{b}, \text{ quindi } \frac{h}{h'} = \frac{a}{b} - 1, \text{ ed infine}$$

$$h' = \frac{bh}{a-b} \quad (2)$$

Calcolo del volume del tronco di piramide

Il volume V del tronco di piramide in oggetto si può ottenere come differenza tra il volume V_1 della piramide $VABCD$ e il volume V_2 della piramide



VA'B'C'D'. Ricordato che il volume di una piramide è uguale ad un terzo del prodotto dell'area di base per la misura della rispettiva altezza si ha

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2 \cdot (h+h') = \frac{1}{3}a^2 \cdot \left(h + \frac{bh}{a-b} \right) = \frac{a^3h}{3(a-b)};$$

$$V_2 = \frac{1}{3}b^2 \cdot h' = \frac{1}{3}b^2 \cdot \frac{bh}{a-b} = \frac{b^3h}{3(a-b)};$$

quindi

$$V = V_1 - V_2 = \frac{a^3h}{3(a-b)} - \frac{b^3h}{3(a-b)} = \frac{h}{3(a-b)}(a^3 - b^3) = \frac{h}{3(a-b)}(a-b)(a^2 + ab + b^2) = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

L'espressione ottenuta per il volume del tronco di piramide è quella richiesta.

*** **