Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

Soluzione

Diciamo subito che **ha ragione Luisa**. La giustificazione dell'affermazione non è semplice. Qui riportiamo qualche indicazione.

Ricordiamo che i numeri razionali, indicato con **Q**, è l'insieme di numeri che si possono ottenere con i quozienti tra due numeri interi relativi *m* ed *n*, con n≠0. Dunque

$$Q=\left\{ x \middle| x=\frac{m}{n}, m\in Z, n\in Z \wedge n\neq 0 \right\}$$

L'insieme dei numeri razionali è infinito ma si dimostra che si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali N. Per questo motivo si afferma che i due insiemi hanno lo stesso ordine di infinito; la loro cardinalità è detta **la cardinalità del numerabile**[(1)] ed è denominata **aleph-zero**, indicata con il simbolo $\aleph_0$
Aggiungiamo che non esistono insiemi infiniti che abbiano cardinalità inferiore.
L'insieme dei numeri irrazionali è ancora infinito, ma ha un ordine superiore; la sua cardinalità è detta "**la cardinalità del continuo**" ed è indicata con la lettera **c**. Non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri razionali e l'insieme dei numeri irrazionali.

---

(1) Si confronti la risoluzione del quesito n.4 della prova dell'Esame di Stato di Matematica del 2012, assegnata nel Liceo Scientifico, indirizzo PNI, nella sessione ordinaria. Il quesito era:
"4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta".
La risorsa è presente sul sito www.matematicaescuola.it al seguente link:
http://www.matematicaescuola.it/index.php?option=com_content&view=article&id=1095:esamedi-stato-liceo-scientifico-2012-pni-questionarioq4-linsieme-n-dei-naturali-e-equipotente-allinsieme-q-dei-razionali-per-utenti-registrati&catid=74:esame-di-stato-sessione-ordinaria-2012&Itemid=82.
Si precisa che la il file cui punta il link è protetto da password ed è accessibile solo previa registrazione alla piattaforma.

Non pensiamo sia il caso di continuare con approfondimenti sulla questione, giacché l'argomento è proprio di un corso di algebra a livello universitario.
Tra i numeri irrazionali notevoli ricordiamo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e in genere $\sqrt{n}$, con n numero naturale non quadrato perfetto, il numero π, il numero e=2,71828182…, utilizzato come base nel sistema dei logaritmi naturali. Come ulteriore elemento di riflessione aggiungiamo che sommando ad un numero razionale un qualsiasi numero irrazionale si ottiene ancora un numero irrazionale.
Per ulteriori riferimenti sull'argomento si confronti un testo specializzato di algebra.
*** ***