Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di:MATEMATICA

QUESTIONARIO

5. In un libro si legge: ” se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell’1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%). È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

Soluzione

(Un quesito sulla dilatazione dei corpi in seguito all’aumento della temperatura)

Premessa

Ricordiamo che la legge fisica sulla dilatazione lineare stabilisce che un corpo (generalmente si fa riferimento ai corpi solidi, perché per i liquidi si parla direttamente di dilatazione volumica) che ad una certa temperatura t_0 abbia una dimensione di misura l_0, se subisce una variazione di temperatura di Δt gradi centigradi (o equivalentemente Δt Kelvin) allora la misura della suddetta dimensione diventa l espressa dalla relazione

$$l = l_0\left(1+\lambda\Delta t\right) \qquad (1)$$

nella quale λ, espresso in $°C^{-1}$ (ovvero in K^{-1}), rappresenta il **coefficiente di dilatazione lineare**.

Osserviamo che dalla (1) si ha:

$l = l_0 + l_0\lambda\Delta t$ da cui $l - l_0 = l_0\lambda\Delta t$.

La differenza $\Delta l = l - l_0$ rappresenta la variazione della lunghezza della suddetta dimensione del corpo e il rapporto

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0\lambda\Delta t}{l_0} = \lambda\Delta t \qquad (2)$$

rappresenta la **variazione percentuale subita**. Nel nostro caso il testo ipotizza che sia

$$\lambda\Delta t = 0,38\% \qquad (3)$$

***

Possiamo sviluppare ora le considerazioni sull'aumento percentuale del volume.

Consideriamo del corpo in oggetto una parte di forma cubica che alla temperatura t_0 abbia lo spigolo di misura l_0; il volume del cubo sarà

$$V_0 = l_0^3$$

Sottoponendo il corpo alla variazione Δt di temperatura la nuova misura l dello spigolo del cubo sarà espressa dalla legge (1), dunque il volume sarà

$$V = l^3 = \left(l_0\left(1+\lambda\Delta t\right)\right)^3 = l_0^3\left(1+3\cdot\lambda\Delta t+3\cdot\left(\lambda\Delta t\right)^2+\left(\lambda\Delta t\right)^3\right),$$

cioè

$$V = V_0\left(1+3\cdot\lambda\Delta t+3\cdot\left(\lambda\Delta t\right)^2+\left(\lambda\Delta t\right)^3\right) \tag{4}$$

Scrivendo la (4) nella seguente forma

$$V - V_0 = V_0\left(3\cdot\lambda\Delta t+3\cdot\left(\lambda\Delta t\right)^2+\left(\lambda\Delta t\right)^3\right)$$

deduciamo la variazione $\Delta V = V - V_0$ di volume verificatasi e possiamo calcolare la variazione percentuale del volume:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3\cdot\lambda\Delta t+3\cdot\left(\lambda\Delta t\right)^2+\left(\lambda\Delta t\right)^3 \tag{5}$$

Se nella (5) poniamo $\lambda\Delta t = 0,38\%$ notiamo che

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3\cdot 0,38\%+3\cdot\left(0,38\%\right)^2+\left(0,38\%\right)^3 = 1,14\cdot 10^{-2}+3\cdot 0,38^2\cdot 10^{-4}+0,38^3\cdot 10^{-6} =$$
$$1,14\cdot 10^{-2}+\left(0,004332\right)\cdot 10^{-2}+\left(0,0000054872\right)\cdot 10^{-2}$$

Osservando i valori numerici dei tre termini nell'espressione finale notiamo che quelli del secondo e del terzo termine non incidono sul valore della seconda cifra decimale del valore percentuale rappresentato dal primo termine e quindi se si intende fornire la variazione percentuale subita dal volume con due cifre decimali il secondo ed il terzo termine sono ininfluenti. Possiamo allora scrivere la seguente approssimazione

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 1,14\cdot 10^{-2} = 1,14\%$$

e concludere che effettivamente "la variazione percentuale del volume è pressoché tripla della variazione percentuale di ogni dimensione lineare del corpo considerato". Questo risultato conduce a scrivere nei testi di Fisica la legge della dilatazione volumica (per i corpi solidi) nella seguente forma

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta t \text{, oppure nella forma } V = V_0 \left(1+\gamma \cdot \Delta t\right), \qquad (6)$$

con γ coefficiente di dilatazione volumica approssimativamente uguale al triplo del coefficiente di dilatazione lineare: $\gamma=3\lambda$.

Per la variazione superficiale?

Si possono sviluppare analoghe elaborazioni algebriche e dimostrare che nel caso della variazione superficiale, cioè qualora si consideri un corpo per il quale siano due le dimensioni preponderanti (si dice che si estende in due dimensioni, come le lamine), il coefficiente di dilatazione β è circa uguale al doppio del coefficiente di dilatazione lineare λ, quindi $\beta=2\lambda$, per cui sussiste la seguente legge

$$\Delta S = S_0 \cdot \beta \cdot \Delta t \text{, cioè } S - S_0 = S_0 \cdot \beta \cdot \left(t - t_0\right), \qquad (7)$$

con $\beta=2\lambda$, S_0 che indica il valore dell'area della superficie considerata alla temperatura t_0 ed S il valore dell'area della stessa superficie alla temperatura t.

Tralasciamo le elaborazioni algebriche.

*** ***

Commento

Per risolvere con adeguate argomentazioni il quesito **il candidato deve conoscere la legge fisica sulla dilatazione dei corpi**. L'argomento proposto fa parte del programma di Fisica previsto in un percorso liceale. Mi sembra che sia stata una forzatura includerlo nel Questionario di una prova di Matematica con la quale si dovrebbero verificare le conoscenze, le competenze e le abilità (applicative) in questa disciplina. Ritengo che se l'estensore del quesito avesse fornito l'espressione della legge fisica richiamata avrebbe stimolato positivamente il candidato ad affrontare il quesito mettendolo in condizione di dimostrare le competenze acquisite in Matematica.