

Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di:MATEMATICA

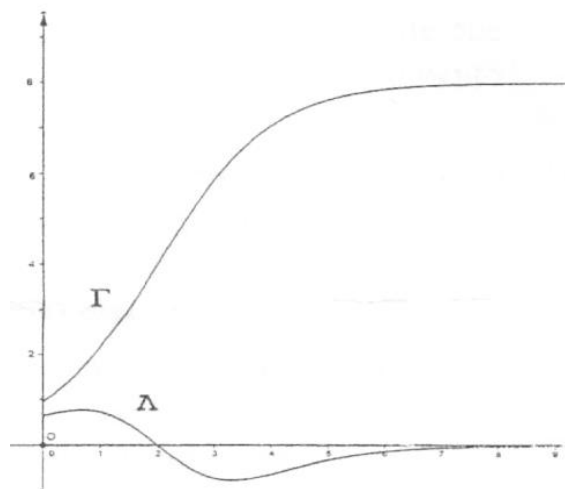
Problema 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0;+\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2;4)$, passa per $(0;0)$, mentre le rette $y=8$ e $y=0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ , rispettivamente.

- 1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è: $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?
- 2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?
- 3) Se Γ è il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{b-x}}, \text{ si provi che } a=8 \text{ e } b=2.$$

- 4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0;2]$.



Soluzione

- 1) La funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0;+\infty[$ ammette le derivate dei primi due ordini, è positiva e dall'andamento del suo diagramma (curva Γ) si evince che si tratta di una funzione strettamente crescente, ciò implica che la funzione derivata prima $f'(x)$ è non negativa.

Osservando il diagramma della funzione derivata seconda si nota che $x=2$ è uno zero e che in un opportuno intorno completo $I(2)$ di tale punto la derivata seconda è positiva a sinistra e negativa a destra e pertanto la funzione derivata prima, limitatamente all'intervallo $I(2)$, è crescente a sinistra di $x=2$ e decrescente a destra dello stesso, per cui il punto $x=2$ è di massimo relativo per la funzione derivata prima. Per determinare l'ordinata del punto di

massimo per la funzione derivata prima, cioè $f'(2)$, si può sfruttare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto di flesso $F(2;4)$ della quale è noto che passa per l'origine O degli assi.

Equazione della tangente inflessionale $t_F: y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, quindi

$t_F: y - 4 = f'(2)(x - 2)$. Imponiamo che l'equazione sia soddisfatta dalla coppia $(0;0)$ e si ha la condizione $-4 = -2f'(2)$, da cui $f'(2) = 2$. Concludiamo che il punto di massimo della funzione derivata prima è $M(2;2)$. L'equazione della tangente inflessionale è $y=2x$.

Sull'andamento di $y=f'(x)$

Abbiamo già precisato che $f'(x) \geq 0$. Possiamo aggiungere che l'andamento asintotico per $x \rightarrow +\infty$ della curva Γ alla retta $y=8$ indica che il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma di $y=f'(x)$ nel generico punto $P(x_0; f'(x_0))$ tende a zero (la tangente tende ad assumere la direzione dell'asintoto $y=8$) e quindi deve aversi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, dunque l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per il diagramma di $y=f'(x)$.

Nel punto iniziale $x=0$?

Al momento non disponiamo di sufficienti informazioni per stabilire il valore $f'(0)$; tuttavia, dalla sussistenza $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ nel dominio di definizione e tenendo conto dei diagrammi delle due funzioni $y=f(x)$ e $y=f'(x)$ sappiamo che il punto $(0; f'(0))$ si trova tra i due punti in cui le curve Γ e Λ intersecano l'asse delle ordinate.

L'andamento del diagramma di $y = f'(x)$ nella figura riportata di seguito è indicato con stile tratteggiato.

Nota

Poiché l'**elaborazione grafica è il risultato di elaborazioni digitali**, e non di disegno a mano libera, è evidente che il diagramma è stato costruito dopo aver risolto il successivo quesito 3).

2) Informazioni sul modello di crescita della popolazione

Il fatto che la funzione $y=f(x)$ sia strettamente crescente in tutto il dominio $[0;+\infty[$, cosa che si evince dalle caratteristiche del diagramma, indica che la popolazione cresce per ogni x (se x è un parametro temporale, la popolazione cresce comunque negli istanti successivi ad $x=0$). La crescita avviene con ritmi diversi: **la velocità con cui cresce** la numerosità della popolazione è descritta dalla funzione derivata prima e si deduce che **nell'intervallo $]0;2[$ il ritmo è più sostenuto**, mentre per $x>2$ il processo di crescita rallenta. Queste informazioni sono dedotte dalla conoscenza che in $x=2$ la curva Γ presenta il flesso $F(2;4)$ ed $f'(2) = 2$ rappresenta il massimo valore raggiunto dal ritmo di crescita. **Per valori di $x \rightarrow +\infty$ la numerosità della popolazione tende al valore teorico di 8** (unità convenzionali, milioni,

miliardi, o altra unità di misura), che comunque non sarà raggiunto in futuro e resterà come l'estremo superiore cui tenderà la numerosità della popolazione.

- 3) Partendo dall'affermazione che la curva Γ sia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{b-x}}, \text{ la presenza}$$

dell'asintoto orizzontale $y=8$ permette di determinare velocemente il parametro a . Infatti, dalla definizione di asintoto orizzontale, poiché si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1+e^{b-x}} = \frac{a}{1+e^{-\infty}} = a, \text{ si deduce}$$

che la retta $y=a$ è asintoto orizzontale per il diagramma per $x \rightarrow +\infty$, per cui deve essere $a=8$. La funzione assume la forma

$$f(x) = \frac{8}{1+e^{b-x}}.$$

Per determinare il parametro b possiamo sfruttare l'informazione che il diagramma della funzione passa dal punto di flesso $F(2;4)$, quindi deve essere

$$f(2) = \frac{8}{1+e^{b-2}} = 4, \text{ da cui}$$

$$1+e^{b-2} = 2, \text{ quindi } b=2.$$

Un altro modo per trovare b è quello che sfrutta la funzione derivata prima della quale si sa già che $f'(2) = 2$.

Essendo

$$f'(x) = \frac{8 \cdot e^{b-x}}{(1+e^{b-x})^2}, \text{ segue}$$

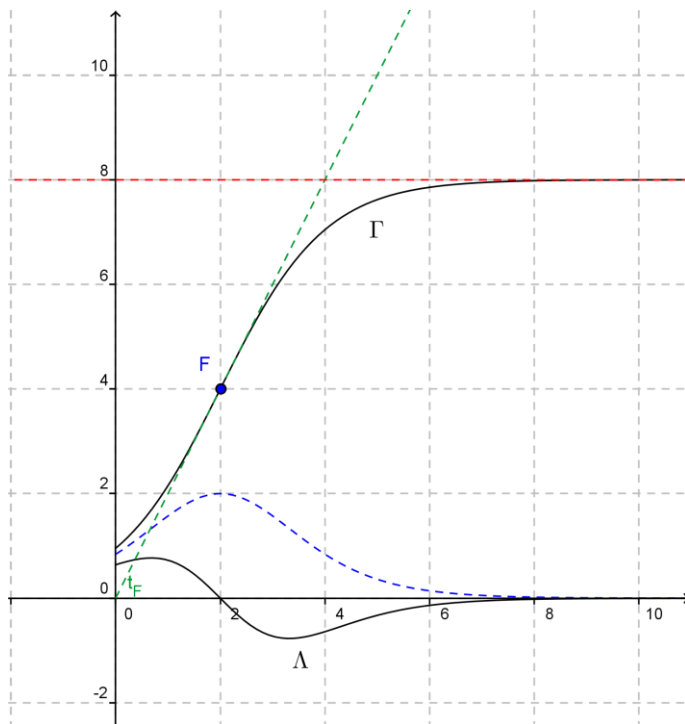


Figura 1- La curva in stile tratteggio rappresenta il diagramma della funzione $y=f'(x)$.

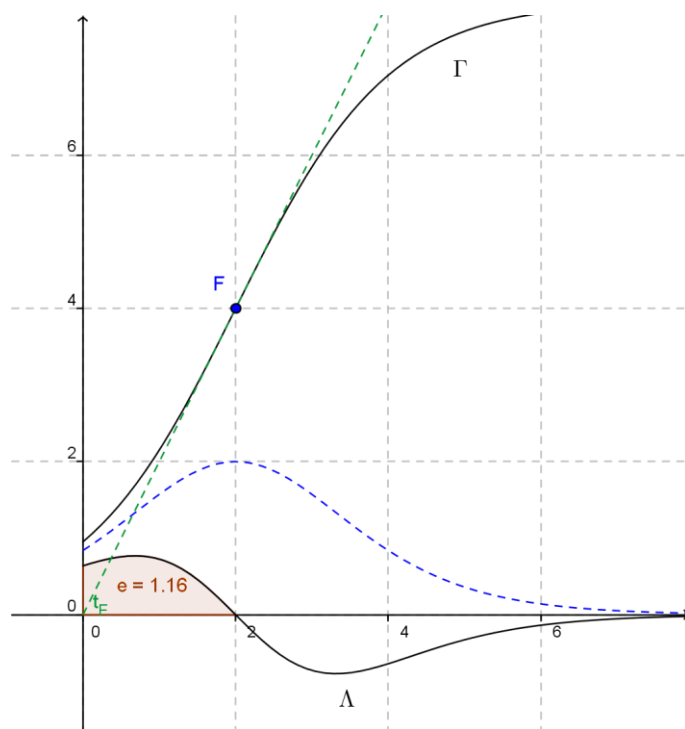


Figura 2

$$f'(2) = \frac{8 \cdot e^{b-2}}{(1 + e^{b-2})^2} = 2, \text{ da cui si perviene all'equazione}$$

$4 \cdot e^{b-2} = (1 + e^{b-2})^2$ nell'incognita b . Ponendo $e^{b-2} = t$ si ricava l'equazione equivalente $1 - 2t + t^2 = 0$, soddisfatta solo da $t=1$, quindi deve risultare $e^{b-2} = 1$, dunque deve essere $b=2$. Concludiamo che la funzione cercata ha la seguente forma

$$f(x) = \frac{8}{1 + e^{2-x}}, \text{ con } x \geq 0.$$

4) Calcolo dell'area della regione piana indicata

Nell'intervallo $[0;2]$ la funzione derivata seconda è non negativa e quindi il valore dell'area della regione piana indicata è quello del seguente integrale definito:

$$\int_0^2 f''(x) dx.$$

Per calcolare questo valore non è necessario determinare esplicitamente l'espressione della derivata seconda perché serve avere di questa una primitiva qualsiasi (teorema fondamentale del calcolo integrale); ebbene una primitiva è la funzione

$$y = f'(x) = \frac{8 \cdot e^{b-x}}{(1 + e^{b-x})^2}, \text{ che con } b=2 \text{ diventa } f'(x) = \frac{8 \cdot e^{2-x}}{(1 + e^{2-x})^2}.$$

Pertanto il valore dell'integrale definito è

$$\int_0^2 f''(x) dx = \left[\frac{8 \cdot e^{2-x}}{(1 + e^{2-x})^2} \right]_0^2 = \frac{8}{2^2} - \frac{8e^2}{(1 + e^2)^2} = \frac{2(1 - e^2)^2}{(1 + e^2)^2} \approx 1,16005$$