

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di :MATEMATICA

QUESTIONARIO

4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

4. L'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali hanno la stessa potenza perché tra essi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca. Aggiungiamo che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ sono equipotenti a ciascun loro sottoinsieme proprio infinito e la potenza comune di questi insiemi rappresenta la **cardinalità del numerabile**, denominata **aleph-zero**; il simbolo utilizzato è $\aleph_0$.

La dimostrazione dell'esistenza della biunivocità tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ non è proprio banale e per questo si rinvia ad un testo specializzato di algebra.

Diamo qui degli accenni a come realizzare una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'insieme delle numeri razionali assoluti, cioè l'insieme $Q_0^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$ e successivamente tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

Ricordiamo che per definizione Q_0^+ è l'insieme

$$Q_0^+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0 \right\}$$

Nell'insieme Q_0^+ definiamo la relazione ρ nel modo seguente

$$\frac{a}{b} \in Q_0^+, \frac{c}{d} \in Q_0^+, \frac{a}{b} \rho \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Si dimostra facilmente che la relazione definita gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, dunque, è una relazione di equivalenza.

Una stessa frazione è in relazione con infinite altre frazioni. Consideriamo l'insieme quoziente Q_0^+ / ρ . In questo insieme ogni elemento (ogni classe di equivalenza) rappresenta un ben preciso numero razionale. Ciascuna di queste classi di equivalenza può essere rappresentata da

una qualsiasi frazione che le appartenga. Ad esempio, le frazioni $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \dots, \frac{2k}{5k}$, con $k \neq 0$,

appartengono tutte alla stessa classe e rappresentano tutte lo stesso numero razionale. Il

numero razionale rappresentato è $\frac{2}{5}$, in forma decimale 0,4. Assumiamo come **rappresentante**

di ciascuna classe di equivalenza in Q_0^+ / ρ una frazione nella quale il numeratore e il denominatore siano numeri primi tra loro, quindi non abbiano divisori comuni diversi da 1; una tale frazione si dice ridotta ai minimi termini.

Verso la corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e Q_0^+ / ρ

Ogni elemento di Q_0^+ / ρ contiene una frazione che è ridotta ai minimi termini; consideriamo questa frazione come rappresentativa del suddetto elemento. **Vogliamo disporre tutte le frazioni ridotte ai minimi termini, che rappresentano di fatto l'insieme Q_0^+ / ρ , in modo che possano essere contate.** Lo schema che vogliamo realizzare è una matrice formata da infinite righe e da infinite colonne rispettando la seguente regola:

“sulla riga k -sima saranno disposte tutte le frazioni aventi come numeratore k e denominatore n , quindi k/n , essendo n primo con k , ordinandole da sinistra a destra in base al valore di k che assumerà nell'ordine i valori $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$, saltando ogni volta la frazione per la quale k ed n non siano primi tra loro”.

A chiarimento della regola fissata facciamo notare che:

- 1) sulla prima riga ci saranno tutte le frazioni aventi come numeratore 1 e denominatore n , quindi del tipo $1/n$, con n crescente per le frazioni nel verso da sinistra a destra;
- 2) sulla seconda riga ci saranno tutte le frazioni aventi come numeratore 2, quindi della forma $2/n$, con n crescente nel verso da sinistra a destra e tale che non sia divisibile per 2;
- 3) sulla terza riga ci saranno tutte le frazioni aventi come numeratore 3 e denominatore n , non divisibile per 3, sempre con n crescente nel verso da sinistra a destra;
- 4) sulla quarta riga ci saranno le frazioni del tipo $4/n$, con n primo con 4, e disposte nell'ordine crescente di n da sinistra a destra: $4/1, 4/3, 4/5, 4/7, \dots$;
- 5) nella quinta riga troveremo nell'ordine $5/1, 5/2, 5/3, 5/4, 5/6, 5/7, 5/8, 5/9, 5/11, \dots$

Per comodità del lettore riportiamo le frazioni che compariranno nei primi otto posti relativamente alla prime cinque righe.

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	...
2/1	2/3	2/5	2/7	2/9	2/11	2/13	...
3/1	3/2	3/4	3/5	3/7	3/8	3/10	...
4/1	4/3	4/5	4/7	4/9	4/11	4/13	...
5/1	5/2	5/3	5/4	5/6	5/7	5/8	...
...							

La riga k -sima dello schema sarà

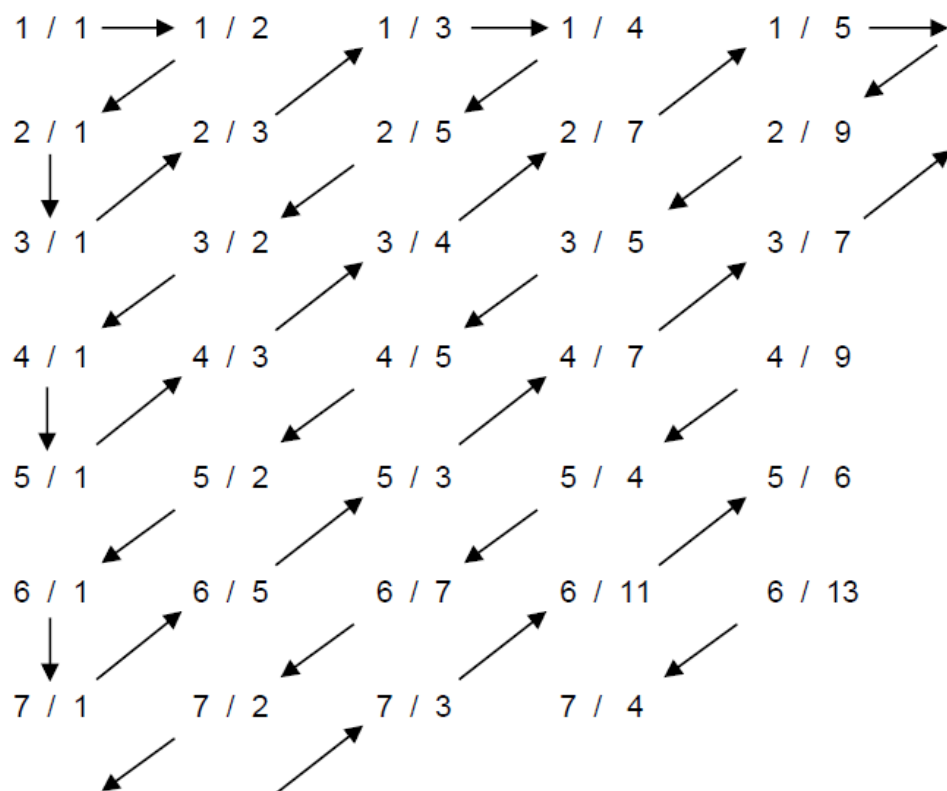
$k/1 \quad k/2 \quad k/3 \quad k/4 \quad \dots$

nel rispetto della regola suddetta che numeratore e denominatore siano primi tra loro.

In questo modo ogni frazione m/n , con m ed n numeri primi tra loro, occuperà una posizione ben precisa e tutte le frazioni (ridotte ai minimi termini) compariranno nella griglia.

Si tratta ora di definire una regola che ci permetta di “contare le frazioni”, ossia di riconoscere che l'insieme delle frazioni ridotte ai minimi termini può essere numerabile e quindi messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

La figura che segue permette di “contare le frazioni”.



Possiamo definire la seguente corrispondenza tra N e Q_0^+

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Q_0^+	0	1/1	1/2	2/1	3/1	2/3	1/3	1/4	2/5	...

La corrispondenza indicata associa ad ogni numero naturale una frazione diversa e ad ogni frazione sarà associato un ben preciso numero naturale.

Una volta realizzata la precedente corrispondenza si può **estendere il procedimento per realizzare la corrispondenza tra N e Q .**

Un'idea potrebbe essere la seguente.

Su ogni riga far seguire ad ogni frazione indicata nel precedente schema la frazione di valore opposto. Lo schema diventa il seguente:

1/1	-1/1	1/2	-1/2	1/3	-1/3	1/4	...
2/1	-2/1	2/3	-2/3	2/5	-2/5	2/7	...
3/1	-3/1	3/2	-3/2	3/4	-3/4	3/5	...
4/1	-4/1	4/3	-4/3	4/5	-4/5	4/7	...

$\frac{5}{1}$ $-\frac{5}{1}$ $\frac{5}{2}$ $-\frac{5}{2}$ $\frac{5}{3}$ $-\frac{5}{3}$ $\frac{5}{4}$...
 ...

Una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ potrebbe essere quella che segue

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Q	0	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	...

Vedere nota⁽¹⁾

⁽¹⁾ Confrontare

Storia della matematica di Carl B. Boyer- Pag. 650-51, Collana GRANDI SAGGI – Oscar Mondadori
 Storia del pensiero matematico-II Dal Settecento a oggi, pag.1162-1163, di Morris Kline-Biblioteca Einaudi