

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di :MATEMATICA

QUESTIONARIO

6. Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed uno solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

Soluzione

Considerata la cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, si può dimostrare agevolmente che presenta sempre un solo punto di flesso di ascissa $x = -\frac{b}{3a}$ e la curva è simmetrica rispetto a detto punto. Dimostriamolo nel caso particolare assegnato.

Prima parte: esistenza del punto di flesso

Occorre determinare la derivata prima e la derivata seconda, e di quest'ultima precisare gli zeri e il segno.

$$y' = 3x^2 + a; \quad y'' = 6x.$$

$y''(x) = 0$ se e solo se $x=0$; $y''(x) > 0$ per $x>0$, $y''(x) < 0$ per $x<0$. Il diagramma della funzione volge la concavità verso l'alto per $x>0$, verso il basso per $x<0$; nel punto $x=0$ vi è un flesso (ascendente). In particolare il flesso è a tangente obliqua se $a \neq 0$.

Osserviamo ora che $y(0) = b$ per cui il punto di flesso è $F(0;b)$.

Seconda parte: simmetria della curva rispetto ad F.

Le equazioni della simmetria centrale di centro F che trasforma il punto $P(x;y)$ nel simmetrico $P'(x';y')$ sono:

$$\sigma_F : \begin{cases} x' = 2x_F - x \\ y' = 2y_F - y \end{cases} \rightarrow \sigma_F : \begin{cases} x' = -x \\ y' = 2b - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$$

L'equazione della curva trasformata si ottiene sostituendo le espressioni di x e y in funzione di x' , e y' nell'equazione $y = x^3 + ax + b$ ed eliminando gli apici. Si ha:

$$y = x^3 + ax + b \rightarrow 2b - y' = (-x')^3 + a(-x') + b \rightarrow -y' = -x'^3 - ax' + b - 2b \rightarrow y' = x'^3 + ax' + b.$$

Avendo ottenuto come equazione rappresentativa della curva trasforma la stessa equazione della cubica di partenza si conclude che le due curve sono geometricamente coincidenti.