

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di :MATEMATICA

QUESTIONARIO

3. Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x , approssimato a meno di 10^{-3} , la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?

Soluzione

Considerata una funzione $y = f(x)$, che sia derivabile nel punto x_0 , è noto che la retta tangente al diagramma della funzione nel punto $P(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). (*)$$

Ricordiamo che in un piano cartesiano, per definizione, per una retta r che non sia parallela all'asse delle ordinate, la pendenza della retta è rappresentata dalla tangente goniometrica dell'angolo che detta retta forma con il semiasse positivo delle ascisse. Poiché una tale retta ammette equazione nella forma esplicita $y = mx + q$, la pendenza è espressa dal coefficiente angolare m .

Ciò premesso, dalla validità dell'equazione (*), si deduce che la pendenza della retta tangente in P coincide con il valore $f'(x_0)$. Si tratta dunque di determinare per quale valore di x_0 la funzione assegnata ha la derivata prima di valore unitario, fornendo di x_0 un valore approssimato con errore inferiore a 0,001.

Ebbene, la funzione derivata prima è $f'(x) = 3^x \cdot \log 3$; dunque il punto x_0 deve verificare l'uguaglianza

$$3^{x_0} \cdot \log 3 = 1 \rightarrow 3^{x_0} = \frac{1}{\log 3} \rightarrow x_0 = \log_3 \left(\frac{1}{\log 3} \right) \rightarrow x_0 = -\log_3 (\log 3) \rightarrow x_0 = -\frac{\log (\log 3)}{\log 3}.$$

Eseguendo con una calcolatrice scientifica il calcolo dell'espressione logaritmica ottenuta si ha

$$x_0 = -\frac{\log (\log 3)}{\log 3} \simeq -0,085606..$$

Poiché $-0,086 < -0,085606... < -0,085$, il valore -0,086, che rappresenta l'approssimazione per difetto di x_0 , affetta da errore inferiore a 10^{-3} , può essere assunto come rappresentativo dell'ascissa del punto x in cui la funzione verifica la proprietà richiesta. Facciamo notare che anche -0,085 può essere assunto come valore approssimato di x_0 perché verifica la stessa proprietà, ma -0,086 rappresenta un'approssimazione migliore perché si discosta di meno da x_0 .