

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di :MATEMATICA

QUESTIONARIO

4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

4. L'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali hanno la stessa potenza perché tra essi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca. Aggiungiamo che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ sono equipotenti a ciascun loro sottoinsieme proprio infinito e la potenza comune di questi insiemi rappresenta la **cardinalità del numerabile**, denominata **aleph-zero**; il simbolo utilizzato è $\aleph_0$.

La dimostrazione dell'esistenza della biunivocità tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ non è proprio banale e per questo si rinvia ad un testo specializzato di algebra.

Diamo qui degli accenni a come realizzare una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'insieme delle numeri razionali assoluti, cioè l'insieme $Q_0^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$ e successivamente tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

Ricordiamo che per definizione Q_0^+ è l'insieme

$$Q_0^+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0 \right\}$$

Nell'insieme Q_0^+ definiamo la relazione ρ nel modo seguente

$$\frac{a}{b} \in Q_0^+, \frac{c}{d} \in Q_0^+, \frac{a}{b} \rho \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Si dimostra facilmente ...

Verso la corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e Q_0^+ / ρ

Ogni elemento di Q_0^+ / ρ contiene una frazione ...

Una volta realizzata la precedente corrispondenza si può **estendere il procedimento per realizzare la corrispondenza tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.**

...