

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di :MATEMATICA

PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \log x$.

1. Fissato un riferimento cartesiano Oxy, si disegnino i grafici di f e di g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.
2. La regione R, ruotando intorno all'asse x, genera un solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.
3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0 . Si dimostri che esiste un solo punto x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

Soluzione

1. I diagrammi delle due funzioni sono riportati in Figura_1

Calcolo dell'area della regione piana R

Osservato che nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

risulta $f(x) > g(x)$, il valore dell'area della regione piana è data dal valore del seguente integrale definito:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) - g(x) \, dx.$$

Calcoliamo prima l'integrale indefinito e successivamente quello definito.

$$\int f(x) - g(x) \, dx =$$

$$\int e^x - \log x \, dx =$$

$$\int e^x dx - \int \log x dx =$$

$$e^x - \left(x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$e^x - x \log x + x + C$$

Valore dell'integrale definito

$$I = \left[e^x - x \log x + x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = e + 1 - \left(\sqrt{e} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = e - \sqrt{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$$

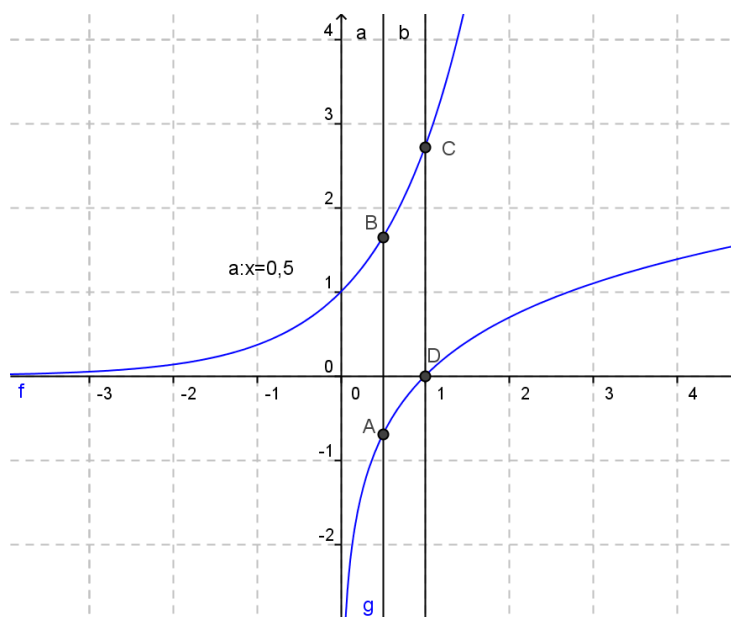


Figura 1

2. Nella rotazione della regione piana R intorno all'asse delle ascisse il solido generato coincide con quello generato nella stessa rotazione dalla parte della regione R che giace nel semipiano delle ordinate positive. Infatti, avendo indicato con A, B, C, D i vertici Della regione piana, risulta

$$0 < |y_A| = \ln 2 < |y_B| = \sqrt{e} \text{ e } y_D = 0.$$

Il valore del volume del **solido S** è pertanto espresso dal seguente integrale definito:

$$V_S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi f(x)^2 dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi e^{2x} dx$$

Approfondimento (non richiesto dal quesito ministeriale)

Il valore dell'integrale definito è

$$V_S = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 2e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} [e^{2x}]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - e)$$

Solido T

Il volume del solido T è il valore del seguente integrale definito

$$V_T = \int_{\frac{1}{2}}^1 2\pi x f(x) - g(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2\pi x (e^x - \log x) dx$$

Approfondimento (non richiesto dal quesito ministeriale)

Valore del volume

$$\begin{aligned} \int 2\pi x (e^x - \log x) dx &= 2\pi \int x e^x dx - 2\pi \int x \log x dx = \\ 2\pi \left[x e^x - \int e^x dx \right] - 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right] &= 2\pi (x e^x - e^x) - 2\pi \left(\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right) + C \rightarrow \\ V_T &= 2\pi \left[x e^x - e^x - \frac{x^2}{4} (2 \log x - 1) \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \dots = \pi \left(\frac{3}{8} + \sqrt{e} - \frac{1}{4} \log 2 \right). \end{aligned}$$

3. Ricordiamo che relativamente ad una funzione $y = f(x)$, se x_0 è un punto in cui la funzione è derivabile, l'equazione della retta tangente nel punto $P(x_0; f(x_0))$ è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Le due funzioni in esame sono senz'altro derivabili in ogni punto $x_0 > 0$ per cui le equazioni delle due rette tangenti sono $r: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $s: y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$.

Condizione di parallelismo

Due rette, per le quali nel piano cartesiano le rispettive equazioni siano esprimibili nella forma esplicita $y = mx + q$, risultano parallele se e solo se i due coefficienti angolari sono uguali. Pertanto, la condizione che deve essere soddisfatta è:

$$f'(x_0) = g'(x_0) \rightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

Calcolo del punto x_0

Considerando la funzione $d(x) = e^x - \frac{1}{x}$, con $x > 0$, si riconosce che **è strettamente crescente** perché la funzione derivata prima è strettamente positiva. Infatti,

$$d'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0.$$

Inoltre, risultando $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$ e $d(1) = e - 1 > 0$, per il **teorema di esistenza degli zeri**, nell'intervallo $]0; 1[$ esiste uno ed un solo zero $x = x_0$; questo valore è quello richiesto.

Determinazione dell'approssimazione di x_0

Si può utilizzare il metodo di bisezione. La ricerca non è particolarmente impegnativa. Ci limitiamo a riportare le elaborazioni eseguite con Excel senza alcun commento.

x	f(x)=e ^x	g(x)=1/x	x ₀
0,5	1,648721	2	
1	2,718282	1	0,5<x<1
0,75	2,117	1,333333	0,5<x<0,75
0,625	1,868246	1,6	0,5<x<0,625
0,5625	1,755055	1,777778	0,5625<x<0,625
0,59375	1,810766	1,684211	0,5625<x<0,59375
0,578125	1,782693	1,72973	0,5625<x<0,578125
0,570313	1,76882	1,753425	0,5625<x<0,570313
0,566406	1,761924	1,765517	0,566406<x<0,570313
0,568359	1,765368	1,75945	0,566406<x<0,568359

Possiamo concludere che il valore richiesto è circa 0,56 e l'errore è inferiore a 0,01.

4. $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \log x$ nell'intervallo chiuso $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ è continua e per il teorema di

Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti. Con lo studio del segno e degli zeri della derivata prima possiamo stabilire se esistono punti di minimo e/o di massimo relativo.

$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x} \geq 0 \rightarrow e^x \geq \frac{1}{x}$$

La disuguaglianza è verificata per $x \geq x_0$, essendo $x_0 \approx 0,56$. La funzione è strettamente

decrescente in $\left[\frac{1}{2}; x_0\right]$ e strettamente crescente in $x_0; 1$. Il punto $x_0 \approx 0,56$ è di minimo

assoluto. Per stabilire dove la funzione ammette il suo valore massimo occorre calcolarla nei due estremi e confrontare i valori ottenuti.

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + \log 2 \approx 2,3417...;$$

$$h 1 = e = 2,7182...$$

Conclusione

La funzione assume il valore massimo nell'estremo $x=1$.