

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \log x$.

1. Fissato un riferimento cartesiano Oxy, si disegnino i grafici di f e di g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.
2. La regione R , ruotando intorno all'asse x , genera un solido S e, ruotando attorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .
3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0 . Si dimostri che esiste un solo punto x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

Soluzione

1. I diagrammi delle due funzioni sono riportati in Figura_1

Calcolo dell'area della regione piana R

Osservato che nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ risulta $f(x) > g(x)$, il valore dell'area della regione piana è data dal valore del seguente integrale definito:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) - g(x) \, dx.$$

...

2. Nella rotazione della regione piana R intorno all'asse delle ascisse il solido generato coincide con quello generato nella stessa rotazione dalla parte della regione R che giace nel semipiano delle ordinate positive. Infatti,...

Approfondimento (non richiesto dal quesito ministeriale)

Il valore dell'integrale definito è...

Solido T

Il volume del solido T è il valore del seguente integrale definito

$$V_T = \int_{\frac{1}{2}}^1 2\pi x [f(x) - g(x)] \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2\pi x [e^x - \log x] \, dx$$

Approfondimento(non richiesto dal quesito ministeriale)

Valore del volume

...

3. Ricordiamo che relativamente ad una funzione $y = f(x)$, se x_0 è un punto in cui la funzione è derivabile, l'equazione della retta tangente nel punto $P(x_0; f(x_0))$ è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Le due funzioni in esame sono senz'altro derivabili...

Calcolo del punto x_0

Considerando la funzione $d(x) = e^x - \frac{1}{x}$, con $x > 0$, si riconosce che è **strettamente crescente**

...

Determinazione dell'approssimazione di x_0

Si può utilizzare il metodo di bisezione. La ricerca non è particolarmente impegnativa. Ci limitiamo a riportare le elaborazioni eseguite con Excel ...

... il valore richiesto è circa 0,56...

4. $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \log x$ nell'intervallo chiuso $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ è continua e per il teorema di

Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti. Con lo studio del segno e degli zeri della derivata prima ...

Conclusione

La funzione assume il valore massimo nell'estremo $x=1$.