

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

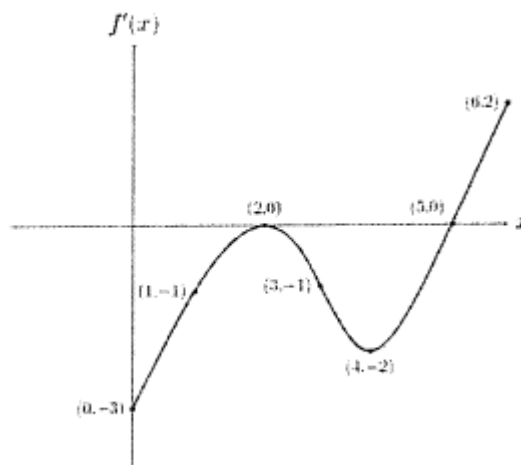
CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di :MATEMATICA

PROBLEMA 1

Della funzione f , definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x=2$ e $x=4$. Si sa anche che $f(0)=9$, $f(3)=6$ e $f(5)=3$.



1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione presenta il suo minimo assoluto?
Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f ?
4. Sia g la funzione definita da $g(x)=xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x=3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto da esse formato.

Soluzione

1. Ricordiamo che **un punto** $x = x_0$ **interno al dominio di definizione di una funzione è di flesso per il grafico** della stessa se la funzione è continua nel punto, il grafico ammette retta tangente nel punto $(x_0; f(x_0))$ ed esiste un intorno completo del punto $I(x_0)$ per il quale si verifica che per $x < x_0$ i punti $P(x; f(x))$ del grafico appartengono ad uno dei due semipiani individuati dalla retta tangente e quelli aventi ascissa $x > x_0$ si trovano nel semipiano opposto.

Se una funzione è derivabile almeno due volte nel suo dominio, **una condizione sufficiente** a garantire che un punto $x = x_0$ sia di flesso è che:

- a) la derivata seconda nel punto si annulli: $f''(x_0) = 0$;
- b) che esista un intorno completo $I(x_0)$ per il quale il segno della derivata seconda a sinistra del punto sia diverso dal segno assunto a destra.

Per la funzione $y=f(x)$ in esame vogliamo provare che sono punti di flesso i punti $x_1=2$ e $x_2=4$. Infatti, in ciascuno dei due punti è nota l'esistenza della retta tangente, che risulta orizzontale e ciò, dal significato geometrico della derivata prima in un punto $x = x_0$, implica che in ciascuno di detti punti esiste la derivata prima ed il suo valore è zero. Nel nostro caso

la derivata prima di $y = f'(x)$ rappresenta la derivata seconda di $y = f(x)$; pertanto, possiamo affermare che esistono i valori $f''(2)$, $f''(4)$ e che sono nulli⁽¹⁾.

Ancora, dall'andamento del grafico della funzione $y = f(x)$ si evince che $x=2$ è punto di massimo relativo proprio, mentre $x=4$ è di minimo relativo proprio; queste caratteristiche di monotonia locale permettono di dedurre ulteriori proprietà di cui gode la funzione $y = f(x)$ in un intorno opportuno di ciascuno dei due punti. Precisamente,

- per $x=2$, esiste un intorno completo $I_1(2)$ in cui $f'(x)$ è strettamente crescente a sinistra e strettamente decrescente a destra; da ciò segue che la derivata prima di $y = f'(x)$, cioè $y = f''(x)$, per ogni $x \in I_1$ risulta positiva se $x < 2$ e negativa se $x > 2$; dunque, sono soddisfatte per $x=2$ le condizioni richiamate sopra perché lo stesso sia punto di flesso per la funzione $y = f(x)$;
- per $x=4$, esiste un intorno completo $I_2(4)$ in cui $f'(x)$ è strettamente decrescente a sinistra e strettamente crescente a destra, quindi la derivata prima di $y = f'(x)$, cioè $y = f''(x)$, per ogni $x \in I_2$ risulta negativa se $x < 4$ e positiva se $x > 4$; dunque, per $x=4$ sono soddisfatte le condizioni richiamate sopra perché il punto sia di flesso e dunque anche $x=4$ è punto di flesso $y = f(x)$.

Possiamo ancora aggiungere che la funzione $y = f(x)$ non ha altri punti di flesso interni all'intervallo $[0;6]$ perché, essendo la funzione dotata di derivata seconda, in un eventuale ulteriore punto di flesso dovrebbe necessariamente annullarsi la derivata seconda $y = f''(x)$; osservando però l'andamento del grafico di $y = f'(x)$ è evidente che la tangente al grafico, che esiste in ogni punto di $[0;6]$, in nessun altro punto, diverso da 2 e 4, è parallela all'asse delle ascisse e quindi la derivata seconda $f''(x)$ non si annulla ulteriormente.

2. Sulla monotonia per $y = f(x)$

Premessa sulla continuità

Prima di studiare la monotonia della funzione è appena il caso di precisare che la funzione $y = f(x)$ è continua in tutto l'intervallo chiuso $[0;6]$. La dimostrazione è una diretta conseguenza dell'esistenza della derivata prima in ogni punto dell'intervallo⁽²⁾. Pertanto, per il teorema di Weierstrass, la funzione ammette massimo e minimo assoluti.

- a. Nell'intervallo $[0;2[$, risultando $f'(x) < 0$, si deduce che la funzione $y = f(x)$ è strettamente decrescente;
- b. ancora, $f'(2) = 0$ indica che la retta tangente al grafico di $y = f(x)$ è parallela all'asse delle ascisse;
- c. risultando $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]2;4[$ si deduce che la funzione $y = f(x)$ è strettamente decrescente in tutto l'intervallo $]2;4[$. Per quanto sopra la funzione è strettamente decrescente in $[0;4[$.

⁽¹⁾ Si noti che questa affermazione è coerente con l'informazione contenuta nel testo del problema che la funzione f è dotata di derivata seconda nel suo dominio.

⁽²⁾ Ricordiamo il teorema: "Se una funzione definita in un punto x_0 è derivabile allora ivi è anche continua".

Evidentemente, per il punto $x=0$ si fa riferimento all'esistenza della derivata prima destra e per il punto $x=6$ all'esistenza della derivata prima sinistra.

- d. Osservando l'intervallo $]4;5[$, si evince che anche in detto intervallo risulta $f'(x) < 0$, per cui la funzione $y = f(x)$ è ancora strettamente decrescente in $]4;5[$ e in definitiva, per quanto detto prima, la funzione è strettamente decrescente in $]0;5[$.
- e. Nel punto $x=5$ si annulla la derivata prima. Per $x \in]5;6[$ risulta $f'(x) > 0$, quindi la funzione $y = f(x)$ è strettamente crescente per cui deduciamo che nel punto $x=5$ la funzione **f assume il suo minimo assoluto**, essendo $\min=f(5)=3$, per ipotesi.

- f. Per la ricerca del valore massimo della funzione è necessario determinare i valori che la stessa assume agli estremi dell'intervallo. Per ipotesi sappiamo che $f(0)=9$; sfruttando l'informazione

$$\text{sull'integrale definito } \int_0^6 f'(t)dt = -5$$

possiamo determinare il valore $f(6)$.

Infatti, essendo $y = f(t)$ una primitiva di $y = f'(t)$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo scrivere

$$\int_0^6 f'(t)dt = [f(t)]_0^6 = f(6) - f(0) = f(6) - 9,$$

che uguagliato al valore noto

$$f(6) - 9 = -5 \text{ permette di concludere che } f(6) = 4.$$

A questo punto si può concludere che la funzione **f assume il suo massimo nel punto $x=0$, con $f(0)=9$.**

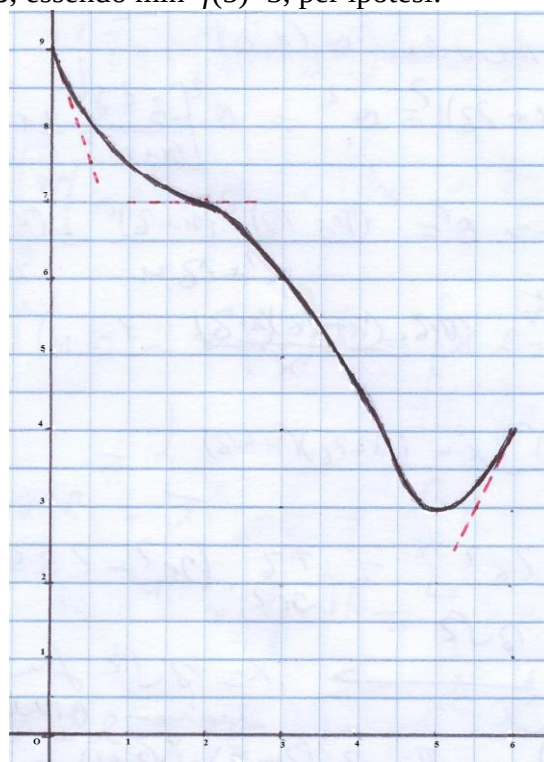


Figura 2- Il grafico riportato è approssimativo di quello della funzione $y=f(x)$.

3. L'andamento del grafico della funzione è riportato in Figura 2.

Si noti che il punto $x=2$ è di flesso con tangente orizzontale ed è un flesso discendente, mentre il punto $x=4$ è di flesso con tangente obliqua, ed è un flesso ascendente.

Si osservi che dai dati disponibili non si possono determinare $f(2)$ ed $f(4)$, per cui il grafico riportato fornisce solo approssimativamente quello effettivo della funzione in esame.

Osservazione sulla curva assegnata

Vogliamo richiamare l'attenzione del lettore sulla forma della curva di equazione $y = f'(x)$, che potrebbe richiamare quella di una cubica. Così non è. Infatti, ricordiamo che ogni cubica ha un solo punto di flesso rispetto al quale la stessa è simmetrica. Ebbene, per la curva assegnata si riconosce che il punto $F(3;-1)$ è di flesso ma la curva non è simmetrica rispetto a detto punto. Per giustificare questa affermazione facciamo notare che il punto $P(0;-3)$ della curva ha come simmetrico rispetto ad F il punto $P'(6;1)$, ma questo non appartiene certamente alla curva perché alla stessa appartiene per ipotesi il punto $P''(6;2)$.

Questa considerazione implica che una primitiva $y = f(x)$ non può essere un polinomio del quarto ordine; su questa questione non intendiamo soffermarci ulteriormente.

4. Siano r ed s le rette tangenti al grafico di f e g nei rispettivi punti $P(3;f(3))$ e $Q(3;g(3))$. Le loro equazioni sono

$$r: y - f(3) = f'(3)(x - 3), \text{ quindi } r: y - 6 = -1(x - 3), \quad r: y = -x + 9;$$

$$s: y - g(3) = g'(3)(x - 3), \text{ dove } g(3) = 3f(3) = 18;$$

$$\text{da } g'(x) = f(x) + xf'(x) \text{ segue } g'(3) = f(3) + 3f'(3) = 3;$$

$$\text{quindi } s: y - 18 = 3(x - 3), \text{ da cui } s: y = 3x + 9.$$

Le due rette sono incidenti nel punto $C(0;9)$ e formano con l'asse delle ascisse il triangolo ABC (vedere Figura 3).

Considerando l'angolo acuto $ACB = \gamma$, risulta

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta) \text{ e quindi } \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Dal significato del coefficiente angolare di una retta, e in relazione alla figura, risulta

$$\operatorname{tg} \alpha = -m(r) = 1, \quad \operatorname{tg} \beta = m(s) = 3$$

e poiché

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}, \text{ deduciamo}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{1+3}{1-1 \cdot 3} = 2, \text{ da cui}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}(2) \approx 63^\circ 26'$$

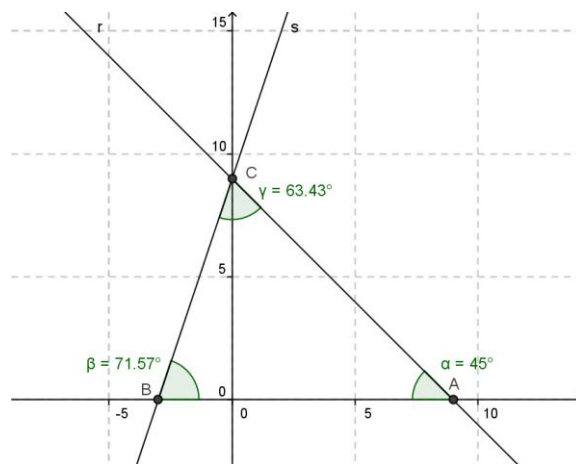


Figura 3