M557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO
Indirizzo: SCIENTIFICO
Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 1

Siano *f* e *g* le funzioni definite, per tutti gli *x* reali, da

$$f(x)=\left|27x^3\right| \text{ e } g(x)=sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione *g*? Si studino *f* e *g* e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette *r* e *s* tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x=\frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da *r* e da *s*?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse *x*, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

Soluzione

1. La funzione *g* ha come periodo $T=2\pi:\frac{3}{2}\pi=\frac{4}{3}$ ed è definita su tutto l'asse reale.

   Per quanto concerne la funzione *f*, osserviamo che la sua definizione è la seguente:
   $$f(x)=\begin{cases} 27x^3 & per \quad x\geq 0 \\ -27x^3 & per \quad x<0 \end{cases}.$$
   I diagrammi delle sue funzioni sono riportati in **Figura 1**; il diagramma di *f* è in colore blu.

2. Osservato che $f\left(\frac{1}{3}\right)=27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=1$ e che $g\left(\frac{1}{3}\right)=sen\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{3}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ deduciamo che il punto $A\left(\frac{1}{3};1\right)$ è comune ai diagrammi delle due funzioni.

   Equazioni delle rette tangenti ai due diagrammi in A.

   Per la funzione *f*

   $$r: y-f\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right); \qquad f'(x)=\begin{cases} 81x^2 & per \quad x\geq 0 \\ -81x^2 & per \quad x<0 \end{cases}, \; f'\left(\frac{1}{3}\right)=81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=9.$$

   $r: y-1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)$, che semplificata diventa $r: y=9x-2$

   Per la funzione g

   $$s: y-g\left(\frac{1}{3}\right)=g'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right); \qquad g'(x)=\frac{3}{2}\pi\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right), \; g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$$

   $s: y-1=0$; la retta è parallela all'asse delle ascisse.

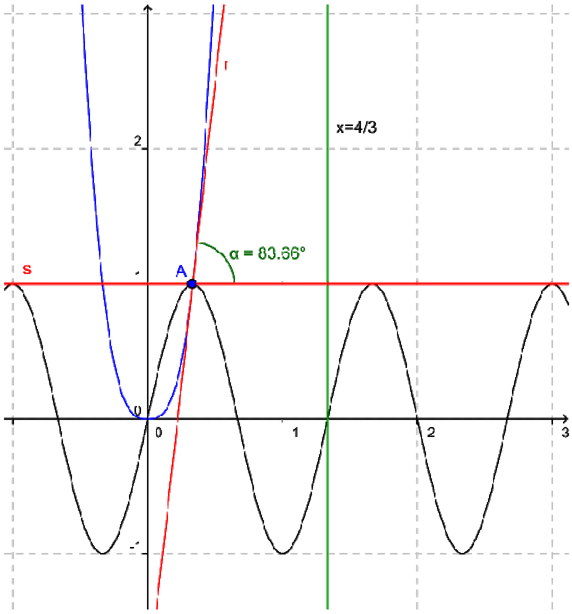
   Ampiezza dell'angolo acuto richiesto formato da r ed s.

   Le due rette incontrandosi formano quattro angoli, a due a due congruenti: due acuti e due ottusi. Visto che *s* è parallela all'asse delle ascisse, uno dei due angoli acuti formati dalle due rette è congruente all'angolo acuto formato dalla retta r con il semiasse positivo dell'asse x. Detto α l'angolo di riferimento, dal significato del coefficiente angolare di una retta si deduce che

$$tg\alpha = m(r) = 9$$

e quindi

che $\alpha = arctg(9) = 83,6598... \approx 83°39'35"$



3. Area delle regione piana R

La regione piana R delimitata dalle due curve è quella contenuta nel primo quadrante ed è relativa ai valori di x dell'intervallo $\left[0;\frac{1}{3}\right]$. Il valore dell'area è quello del seguente integrale definito:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \left(g(x) - f(x)\right) dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \left(sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3 \right) dx =$$

$$\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - \frac{27}{4}x^4 \right]_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{27}{4}\cdot\frac{1}{81} \right] - \left[-\frac{2}{3\pi} - 0 \right] =$$

$$\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12} \approx 0,129$$

ni f, g e tangenti nel

4. Solidi di rotazione

Il volume del solido S descritto dalla regione R nella rotazione completa attorno all'asse delle ascisse ha misura coincidente con il valore del seguente integrale definito:

$$V(S) = \int_0^{\frac{1}{3}} \pi\left(\left(g(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 \right) dx$$

Il volume del solido T descritto dalla stessa regione R nella rotazione intorno all'asse y è quello del seguente integrale definito

$$V(T) = \int_0^{\frac{1}{3}} 2\pi x\left(g(x) - f(x)\right) dx$$