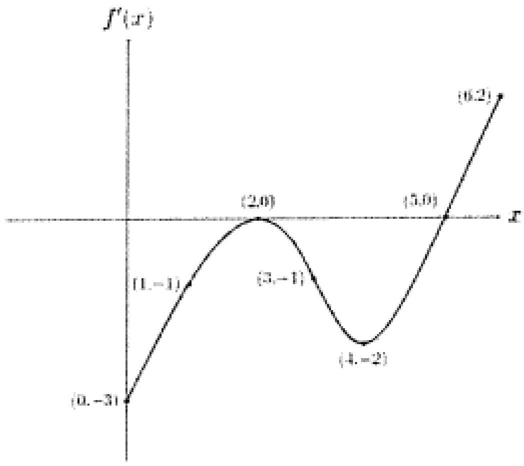
Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE
Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di :MATEMATICA

PROBLEMA 1

Della funzione *f*, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x=2$ e $x=4$. Si sa anche che $f(0)=9$, $f(3)=6$ e $f(5)=3$.



1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di *f* motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di *x* la funzione presenta il suo minimo assoluto?
   Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di *x* *f* presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di *f* ?
4. Sia *g* la funzione definita da $g(x)=xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di *f* e di *g* nei rispettivi punti di ascissa $x=3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto da esse formato.

Soluzione

1. Ricordiamo che **un punto** $x = x_0$ **interno al dominio di definizione di una funzione è di flesso per il grafico** della stessa se la funzione è continua nel punto, il grafico ammette retta tangente nel punto $(x_0; f(x_0))$ ed esiste un intorno completo del punto $I(x_0)$ per il quale si verifica che per $x < x_0$ i punti $P(x;f(x))$ del grafico appartengono ad uno dei due semipiani individuati dalla retta tangente e quelli aventi ascissa $x > x_0$ si trovano nel semipiano opposto.

   Se una funzione è derivabile almeno due volte nel suo dominio, **una condizione sufficiente** a garantire che un punto $x = x_0$ sia di flesso è che:

   a) la derivata seconda nel punto si annulli: $f''(x_0) = 0$;

   b) …

   Ancora, dall'andamento del grafico della funzione $y = f'(x)$ si evince che $x=2$ è punto di massimo relativo proprio, mentre $x=4$ è di minimo relativo proprio; queste caratteristiche di monotonia locale permettono di dedurre ulteriori proprietà di cui gode la funzione $y = f(x)$ in un intorno opportuno di ciascuno dei due punti . Precisamente,

   …

2. Sulla monotonia per $y = f(x)$

Premessa sulla continuità

Prima di studiare la monotonia della funzione è appena il caso di precisare che la funzione $y = f(x)$ è continua in tutto l'intervallo chiuso [0;6] …

a. Nell'intervallo [0;2[, risultando $f'(x) < 0$, si deduce che la funzione $y = f(x)$ è strettamente decrescente;
b. …
c. …
d. …
e. …
f. Per la ricerca del valore massimo della funzione è necessario determinare i valori che la stessa assume agli estremi dell'intervallo. Per ipotesi sappiamo che $f(0)=9$; sfruttando l'informazione sull'integrale definito $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ . ..

3. L'andamento del grafico della funzione è riportato in …

…

Osservazione sulla curva assegnata

Vogliamo richiamare l'attenzione del lettore sulla forma della curva di equazione $y = f'(x)$, che potrebbe richiamare quella di una cubica. Così non è. Infatti,…

4. Siano r ed s le rette tangenti al grafico di f e g nei rispettivi punti P(3;f(3)) e Q(3;g(3)). Le loro equazioni sono
$r: y - f(3) = f'(3)(x-3)$, quindi $r: y-6 = -1(x-3)$, $r: y = -x+9$;
$s: y - g(3) = g'(3)(x-3)$, dove $g(3) = 3f(3) = 18$;…