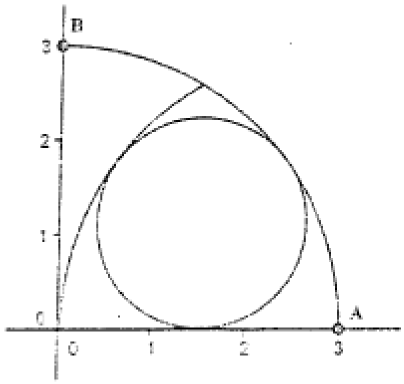
M557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO
Indirizzo: SCIENTIFICO
Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3;0) e B(0;3) e l'arco L della parabola di equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto (0;3/2).

1. Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse *x*, hanno, per ogni 0≤*x*≤3, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse *x*.
4. Si provi che L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3 , come nella figura.



Soluzione

1. La circonferenza di centro O e passante per i punti A(3;0), B(0;3) ha raggio 3 ed ha equazione cartesiana $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 9$.

   Equazione della retta r tangente all'arco L della parabola $\lambda_2 : x^2 = 9 - 6y$ in A(3;0)

   Scritta l'equazione della parabola esplicitando y rispetto ad x, $\lambda_2 : y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} = f(x)$,

   l'equazione della retta t_A tangente in oggetto si ottiene dalla forma

   $t_A : y - f(x_A) = f'(x_A)(x - x_A)$, con $f'(x) = -\frac{1}{3}x$; dunque, essendo $f(x_A) = 0$ e

   $f'(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$, l'equazione è $r : y = -x + 3$.

   Osservazione

   La retta r interseca l'asse delle ordinate in B(0;3).

   La regione R in questione è divisa dalla tangente r in due parti delle quali quella delimitata da r e dall'arco AB della circonferenza è un segmento circolare la cui area S_1 si ottiene dalla differenza tra l'area del quadrante AOB del cerchio delimitato da λ_1 e l'area del triangolo rettangolo isoscele AOB, dunque risulta

   $S_1 = \frac{\pi}{4}\overline{OA}^2 - \frac{1}{2}\overline{OA}^2 = \frac{9}{4}(\pi - 2)$;

la seconda regione piana ha area S_2 che si può ottenere come differenza tra l'area del triangolo rettangolo AOB e la metà dell'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola λ_2 e dall'asse x.
L'area S_3 del segmento parabolico si può calcolare con il teorema di Archimede ed è pari ai due terzi del prodotto della misura della base per l'altezza dello stesso. Considerati A′(-3;0), simmetrico di A rispetto all'asse di simmetria della parabola e il vertice V(0;3/2), risulta

$$S_3 = \frac{2}{3}\cdot\overline{AA'}\cdot y_V = \frac{2}{3}\cdot 6\cdot\frac{3}{2} = 6$$

e quindi

$$S_2 = \frac{1}{2}\overline{OA}^2 - \frac{1}{2}S_3 = \frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{3}{2}$$

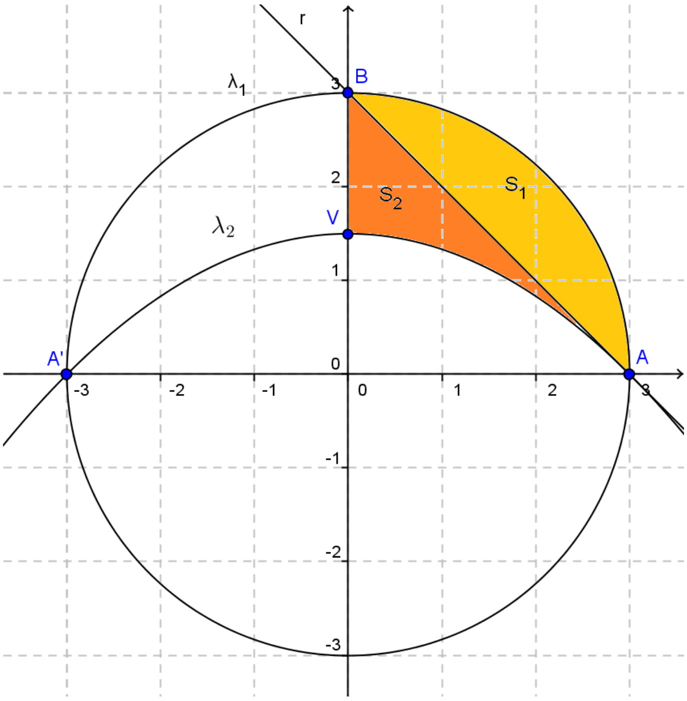


Figura 1

2. Il volume del solido W è il valore del seguente integrale definito

$$V(W) = \int_0^3 S(x)\,dx = \int_0^3 e^{5-3x}dx =$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^3 e^{5-3x}\cdot D(5-3x)\,dx = -\frac{1}{3}\left[e^{5-3x}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\left(e^{5-9} - e^5\right) = \frac{e^5 - e^{-4}}{3} \approx 49{,}4649$$

3. Il solido di rotazione W_3 descritto dalla regione R in una rotazione completa attorno all'asse x è la differenza tra la semisfera W_1 descritta nella stessa rotazione dal quadrante AOB e il solido W_2 descritto dalla metà del segmento parabolico AA′V; applicando gli integrali definiti si determina il valore del volume di W_2. Risulta

$$V(W_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\overline{OA}^3 = \frac{2}{3}\pi\cdot 3^3 = 18\pi\,;$$

$$V(W_2) = \int_0^3 \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \int_0^3 \pi\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 dx = \pi\int_0^3\left(\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}\right)dx =$$

$$\pi\left[\frac{1}{36}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x\right]_0^3 = \pi\left(\frac{1}{36}\cdot\frac{3^5}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3^3}{3} + \frac{27}{4}\right) = \frac{18}{5}\pi\,;$$

$$V(W_3) = V(W_1) - V(W_2) = 18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{72}{5}\pi$$

4. Facciamo riferimento alla **Figura 2**.
Sia C(α;β) il centro di una circonferenza tangente all'asse delle ascisse in T e all'arco AB di λ_1 in D, con $0 \le \alpha \le 3$ e $0 \le \beta \le 3$.
Osserviamo che la circonferenza in oggetto e la circonferenza avente centro nell'origine O degli assi e raggio di misura 3 essendo tangenti nel punto D hanno in questo punto la stessa retta tangente, sia t questa tangente; il raggio CD è perpendicolare a t ma anche il raggio OD è perpendicolare a t, dunque i punti O, C e D sono allineati.
Ciò premesso notiamo che risulta
$\overline{OC} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, nonché $\overline{CD} = \overline{CT} = \beta$, dunque sussiste l'uguaglianza

$\beta = 3 - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, da cui $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 3 - \beta$ ed elevando al quadrato i due membri e riducendo i termini simili si ottiene

$\alpha^2 = 9 - 6\beta$

Ponendo x ed y rispettivamente al posto di α e β nell'equazione ottenuta si perviene all'equazione cartesiana del luogo dei centri delle circonferenze considerate; si riscontra che coincide con quella dell'equazione della parabola λ_2 cui appartiene l'arco L considerato nel testo.

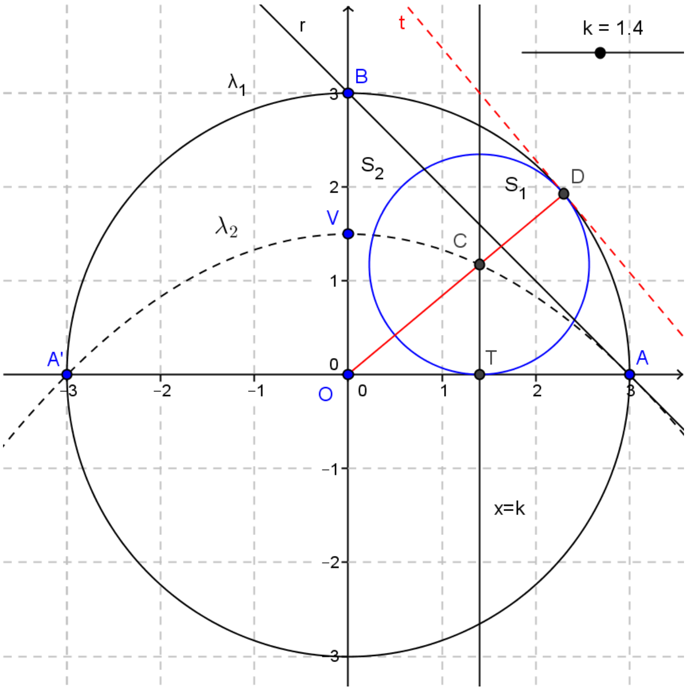


Figura 2