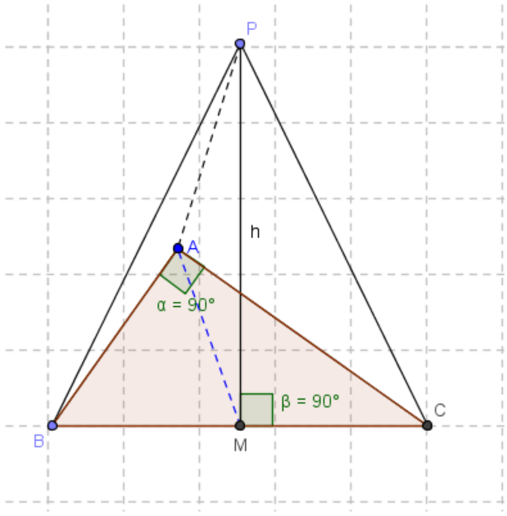
QUESTIONARIO

9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

Soluzione

Considerato il triangolo ABC, rettangolo in A, sia AM la mediana relativa all'ipotenusa BC. E' noto che M è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, quindi è equidistante dai vertici A, B, C (M è il circocentro del triangolo).
Per dimostrare la tesi del quesito occorre provare le due seguenti proposizioni:

a) Considerata la retta h per M perpendicolare al piano del triangolo, ogni suo punto è equidistante dai vertici del triangolo.
b) Detto V un qualsiasi punto dello spazio equidistante dai vertici del triangolo ABC, allora esso appartiene alla retta per M perpendicolare al piano del triangolo.



Dimostrazione della proposizione a)

Sia dunque *h* la retta per M e perpendicolare al piano del triangolo e P un punto qualsiasi di *h*, distinto da M. Osserviamo che i triangoli PMA, PMB, PMC sono tutti rettangoli in M ed hanno i cateti ordinatamente congruenti, dunque sono congruenti e perciò risulta PA≅PB≅PC; il punto P è equidistante dai vertici del triangolo. C.V.D.

Dimostrazione della proposizione b)

Sia dunque V un punto dello spazio equidistante dai vertici A, B, C del triangolo rettangolo ABC. Se V appartiene al piano del triangolo ABC allora coincide con il circocentro del triangolo stesso, dunque con M la tesi è provata. Supponiamo dunque che V non appartenga al piano del triangolo ABC e sia V′ il piede della perpendicolare condotta da V al suddetto piano. Notiamo che i triangoli rettangoli VV′A, VV′B, VV′C hanno i segmenti VA, VB, VC congruenti perché V è equidistante dai vertici del triangolo ABC, inoltre i triangoli hanno anche il segmento VV′ in comune. Ora, poiché i tre triangoli sono rettangoli nel vertice V′, avendo congruenti l'ipotenusa ed un cateto risultano congruenti tra loro e dunque risulta anche V′A≅ V′B≅ V′C, cioè il punto V′ è equidistante dai vertici A, B, C e perciò ne è il circocentro. Ma il circocentro di ABC è unico ed è il punto M, dunque V′≡M. Questa conclusione permette di affermare che la perpendicolare condotta da V al piano del triangolo coincide con la retta *h*, perpendicolare allo stesso piano per M.

Commento

Il quesito è di pura geometria razionale nello spazio tridimensionale. Il candidato deve dimostrare un teorema. La difficoltà connessa non è eccessiva e la dimostrazione non è lunga. Si sottolinea, tuttavia, che il candidato deve provare due tesi, che caratterizzano il luogo geometrico in oggetto. Se il candidato riesce ad esplicitare correttamente le ipotesi, argomenta i ragionamenti seguiti per acquisire le tesi e costruisce una chiara figura di riferimento, gli si può riconoscere anche il massimo punteggio attribuibile ad uno dei cinque quesiti che deve risolvere per ottenere il massimo punteggio nella prova.

Livello di difficoltà 3-4, in una scala di difficoltà da 1 a 5