QUESTIONARIO

7. Si provi che l'equazione: $x^{2011}+2011x+12=0$ ha una sola radice compresa fra -l e 0.

Soluzione

Osserviamo che il polinomio $P(x)=x^{2011}+2011x+12$ è di grado dispari e dunque nel campo reale ammette almeno uno zero. Graficamente ciò vuol dire che il diagramma della funzione
$y=P(x)$ deve avere con l'asse reale almeno un punto in comune.

D'altra parte osserviamo che la derivata prima $P'(x)=2011x^{2010}+2011$ assume valori strettamente positivi su tutto R. Se il polinomio in questione avesse almeno due zeri, siano essi x_1, x_2, poiché la funzione corrispondente nell'intervallo $[x_1; x_2]$ verificherebbe le ipotesi del teorema di Rolle, perché è derivabile ed assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo $f(x_1)=f(x_2)=0$, in almeno un punto interno all'intervallo si dovrebbe annullare la derivata prima; ma ciò abbiamo visto che non si verifica. Dunque lo zero del polinomio è unico e perciò l'equazione ammette una sola radice reale.

Infine, essendo $f(-1)=$ -2000<0 e f(0)=12>0, per il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, possiamo affermare che lo zero del polinomio è interno all'intervallo [-1;0].

Commento

Si tratta di una tipologia di esercizi già apparsa nella prova d'esame del 2009, nel corso di ordinamento. Infatti, in quell'anno la stessa richiesta è stata posta come quesito n.8 nel questionario relativamente all'equazione $x^{2009}+2009x+1=0$ [(1)]. Quest'anno l'autore ha utilizzato l'anno corrente: 2011.

L'autore del testo intende verificare se lo studente conosce il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue e possiede le competenze sul calcolo differenziale che gli consentono di conseguire la tesi.

Nella prova di giugno 2013 ci sarà da studiare l'equazione $x^{2013}+2013x+14=0$ nell'intervallo [-1;0]?

Livello di difficoltà: 2-3, in una scala di difficoltà da 1 a 5

[(1)] Il testo del quesito n.8 del 2009

"Si provi che l'equazione

$$x^{2009}+2009x+1=0$$

ha una sola radice compresa tra -1 e 0. "