QUESTIONARIO del Corso di Ordinamento-Prova del 23-06-2011

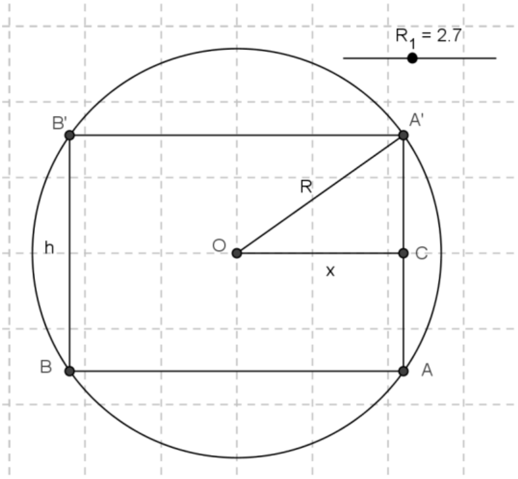
1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Soluzione

Indichiamo con R la misura del raggio della sfera in cui è inscritto il cilindro e con *x* ed *h* rispettivamente le misure del raggio di base e dell'altezza del cilindro. Facendo riferimento alla figura riportata, applicando il teorema di Pitagora al triangolo OCA′si ricava $\frac{h}{2}=\sqrt{R^2-x^2}$, con $0\le x\le R$. Con *x*=0 oppure *x*=R si hanno cilindri di volume nullo ed evidentemente non possono rappresentare il cilindro di volume massimo.

La misura del volume V(*x*) del cilindro inscritto è

$$V(x)=\pi x^2\cdot h=2\pi x^2\sqrt{R^2-x^2}$$



Occorre determinare il valore massimo di questa funzione, che esiste per il teorema di Weierstrass essendo continua e considerata nel dominio chiuso e limitato [0;R]. Determiniamo la funzione derivata prima e studiamone zeri e segno.

$$V'(x)=2\pi\left(2x\sqrt{R^2-x^2}+x^2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)=$$

$$2\pi\cdot\frac{2R^2x-3x^3}{\sqrt{R^2-x^2}}=2\pi\cdot\frac{x\left(2R^2-3x^2\right)}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Osservato che limitatamente al dominio di definizione la funzione derivata prima si annulla nei punti x_1=0, $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}R$ e che $2R^2-3x^2>0$ è soddisfatta nell'intervallo $\left]0;\sqrt{\frac{2}{3}}R\right[$, possiamo affermare che la derivata prima è positiva nell'intervallo $\left]0;\sqrt{\frac{2}{3}}R\right[$ e dunque quivi la funzione volume è strettamente crescente, mente nell'intervallo $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}R;R\right[$ la derivata prima è negativa e quindi quivi la funzione volume è strettamente decrescente. Concludiamo che il punto $x=\sqrt{\frac{2}{3}}R$ è di massimo relativo, nonché assoluto e si ha:

$$V_{\max}=V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)=2\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2\sqrt{R^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$$

Capacità in litri del serbatoio

Essendo R=60cm si ha:

$$V_{\max}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}(60cm)^3=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\cdot 6^3\cdot 10^3cm^3=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\cdot 6^3\cdot 10^3\cdot 10^{-3}l\approx 522,36l$$