Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2
Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni *f* e *g* definite, per tutti gli *x* reali, da:

$$f\left(x\right)=x^3-16x \qquad \text{e} \qquad g\left(x\right)=sen\frac{\pi}{2}x$$

1. Si studino le funzioni *f* e *g* e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo [-10;10] e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di *f* e di *g* sull'intervallo [0;4]. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette y=-15 e y=-5, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza *x* dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da h(*x*)=5-*x*. Quale sarà il volume dell'acqua nella piscina? Quanti litri di acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Soluzione

1. **Studio della funzione *f*(*x*).**
   a. Si tratta di una cubica. La funzione è definita in R, è continua e ammette derivate di qualsiasi ordine in tutto il dominio.
   b. Segno zeri
   Risolvendo l'equazione $x\left(x^2-16\right)=0$ si ricavano immediatamente gli zeri della funzione: $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=4$. …
   c. Limiti agli estremi del dominio
   …
   d. Monotonia, punti critici, massimi e minimi relativi
   La derivata prima della funzione $f'(x)=3x^2-16$ si annulla nei punti …
   e. Concavità e flessi.
   Le cubiche hanno un punto di flesso che …

* * * * * * *

Studio della funzione $g\left(x\right)=sen\frac{\pi}{2}x$

La funzione in oggetto è dedotta dalla funzione elementare *y=senx*, con il semplice cambio di variabile ponendo, in luogo di *x*, t=$\frac{\pi}{2}x$; le sue caratteristiche sono dunque quelle della sinusoide.

a. …

I diagrammi delle due funzioni sono riportati in **Figura 1**.

Punti a tangente orizzontale per il diagramma della funzione g.

Abbiamo precisato che la funzione g è derivabile su tutto R; i punti del grafico di g nei quali la retta tangente è orizzontale sono quelli …

* * * * * * *

2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo [0;4]. Si calcoli l'area di R.

Soluzione

Nell'intervallo [0;4] risulta soddisfatta la disuguaglianza $g(x) \geq f(x)$ e perciò l'area della regione piana R è il valore del seguente integrale definito

…

* * * * * * *

3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette y=-15 e y=-5, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).

Soluzione

Per determinare le ascisse dei punti in cui collocare i quattro fari, indicati in figura con F_1, F_2, F_3, F_4, si **devono risolvere due equazioni**. Le ascisse dei fari F_1, F_4, sono radici dell'equazione $f(x)=-5 \rightarrow x^3-16x+5=0$. Si osservi che quest'equazione ammette tre radici reali, due sono le ascisse dei punti F_1, F_4, che si devono determinare, e la terza ha valore negativo …

Valore dell'ascissa di F_1.

Sia α l'ascissa di F_1. Sappiamo già che il valore cercato è compreso tra 0 e l'ascissa del punto di minimo relativo: $0<\alpha<4/\sqrt{3}$, essendo $4/\sqrt{3} \approx 2,309$.

Avendo già rappresentato il diagramma della funzione $y=f(x)$ sappiamo che …

Con procedimento analogo si trova il valore dell'ascissa del faro F_4; indicato con β tale valore, risulta $\beta=3,84$.

Per la determinazione delle ascisse dei fari F_2, F_3 l'equazione da risolvere è

$f(x)=-15 \rightarrow x^3-16x+15=0$.

…

Si possono osservare le elaborazioni con il foglio elettronico per la ricerca delle ascisse dei fari F_1,F_4. Apri il foglio di lavoro

* * * * * * *

4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità del'acqua nella piscina è data da $h(x)=5-x$. Quale sarà il volume dell'acqua nella piscina? Quanti litri di acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Soluzione

Il quesito si risolve con il calcolo di un integrale definito. Spieghiamo il procedimento.

La regione R è un dominio piano che possiamo pensare di descrivere tramite un segmento PQ di lunghezza variabile $l(x)$, …

La forma del "solido Σ" costituito dall'acqua che può contenere la piscina.

Il solido Σ può essere pensato descritto da un rettangolo che in un riferimento cartesiano ortogonale Oxyz giace in un piano parallelo al piano coordinato $\pi(yz)$,…

Il volume elementare dV vale $dV=S(x)dx$ e il valore del volume di Σ è dato da quello del seguente integrale definito…

Calcolo dell'integrale definito

…

Valore del volume del solido Σ e dell'integrale espresso in metri cubi

$V(\Sigma) = (2,56 + 183,47)m^3 = 186,03m^3$

Il valore del volume espresso in litri è 186.030*l*

L'architetto al lavoro

Riportiamo di seguito un'immagine in 3D della piscina che il fantomatico architetto richiamato nel testo del problema risolto avrebbe potuto realizzare.

L'immagine è stata realizzata da Francesca Lecci, studentessa di Ingegneria-Architettura presso l'Università di Bologna, che ringrazio per la collaborazione.

L'immagine è stata costruita utilizzando le espressioni analitiche delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ per la forma della superficie libera dell'acqua e l'espressione $h(x)=5-x$ per il fondale della piscina.