M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO (**quesiti 7 - 8**)

7. Per quale o quali valori di k la funzione

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-11x-4, & x\le 4 \\ kx^2-2x-1, & x>4 \end{cases}$$

è continua in x=4?

Soluzione

La funzione è definita per casi tramite due polinomi di secondo grado. La funzione polinomio è definita e continua su tutto l'asse reale, ma in questo caso la funzione è definita utilizzando due polinomi diversi. La funzione in esame, per la sua struttura, è continua per ogni punto x≠4 per ogni valore reale che si attribuisca al parametro k; affinché sia continua anche nel punto x=4 si deve imporre che sia soddisfatta la condizione che il limite della funzione per x→4 sia uguale al valore che la stessa assume nel punto indicato.

Dalla continuità della funzione polinomio risulta:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=f(4)=48-44-4=0;$$

il valore del limite laterale destro nel punto x=4 vale

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+} kx^2-2x-1=16k-9$$

Affinché la funzione sia continua nel punto x=4 i valori dei limiti laterali calcolati devono coincidere:

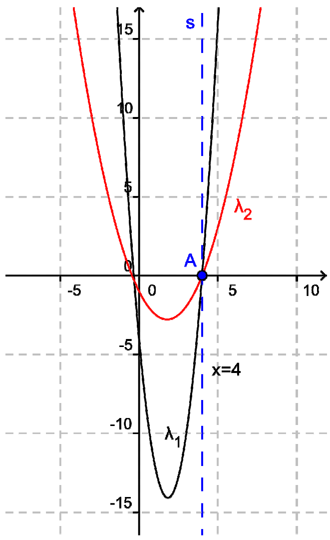
$$16k-9=0\to k=\frac{9}{16}$$

La definizione della funzione in esame è dunque: $f(x)=\begin{cases} 3x^2-11x-4, & x\le 4 \\ \frac{9}{16}x^2-2x-1, & x>4 \end{cases}$

Approfondimento

Nella figura a lato sono riportati i diagrammi delle due parabole

$\lambda_1: y=3x^2-11x-4$, $\lambda_2: y=\frac{9}{16}x^2-2x-1$.



Il diagramma della funzione $y=f(x)$ è composto dall'arco della prima parabola limitatamente all'intervallo]-∞;4] e dall'arco della seconda parabola nell'intervallo]4; +∞[. Si osserva che nel punto A(4;0) si ha il raccordo dei due rami del diagramma della funzione. Il lettore osservi che nel punto x=4 la funzione f(x) in esame non è derivabile ed il punto A(4;0) è angoloso per grafico. In detto punto le due semitangenti hanno pendenza diversa: quella sinistra ha pendenza $f'_-(4)=13$, quella destra ha pendenza $f'_+(4)=\frac{5}{2}$. Negli altri punti del dominio la funzione ammette derivate di qualsiasi ordine.

* * * * *

8. Se n>3 e $\binom{n}{n-1},\binom{n}{n-2},\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

Soluzione

Ricordiamo che i termini numerici $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ sono in progressione aritmetica se la differenza tra un termine ed il precedente, ad iniziare dal secondo, è costante.
Tenendo presente le proprietà dei coefficienti binomiali calcoliamo i valori dei tre termini ed imponiamo la condizione indicata.

$$a_1=\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\cdot(n-(n-1))!}=\frac{n!}{(n-1)!}=n$$

$$a_2=\binom{n}{n-2}=\frac{n!}{(n-2)!\cdot(n-(n-2))!}=\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\cdot 2!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_3=\binom{n}{n-3}=\frac{n!}{(n-3)!\cdot(n-(n-3))!}=...=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

I valori delle differenze richieste sono

$$a_2-a_1=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2},$$

$$a_3-a_2=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n(n-1)}{2}=...=\frac{n(n-1)(n-5)}{6}.$$

Imponendo l'uguaglianza delle due differenze si ottiene l'equazione in n

$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{n(n-1)(n-5)}{6}$, da cui, essendo n>3, si ottiene

$n^2-9n+14=0 \rightarrow n_1=2, n_2=7$. Dei due valori trovati è accettabile solo il secondo: n=7.

I tre valori numerici corrispondenti sono $a_1=7$, $a_2=21$, $a_3=35$ che formano una progressione aritmetica di ragione d=14.