M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

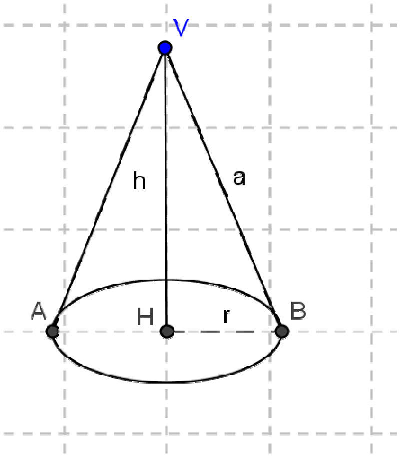
QUESTIONARIO (**quesiti 5** e **6**)

5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Soluzione

Consideriamo il cono circolare retto riportato in figura avente per base il cerchio di diametro AB=2r, altezza VH=h ed apotema VB di misura *a*.
Si tratta di determinare qual è il volume massimo del cono indicato con il vincolo che l'apotema misuri 80cm.

Facciamo notare che una volta fissata la misura dell'apotema, la forma del solido ed il suo volume dipendono dal raggio di base. Cerchiamo di determinare la misura del raggio r in funzione dell'apotema *a* in modo che il volume del corrispondente cono sia massimo.



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo VHB si ricava la misura *h* dell'altezza del cono.

$$\overline{VH} = h = \sqrt{a^2 - r^2}$$

Il volume del cono è $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2}$.

Considerando il volume in funzione di r, cioè la funzione $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2}$, se ne deve determinare il massimo sotto la condizione $0 \le r \le a$ per la misura del raggio.

Troviamo la funzione derivata prima e studiamone il segno.

$$V'(r) = \frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{a^2 - r^2} + r^2\frac{1\cdot(-2r)}{2\sqrt{a^2 - r^2}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{a^2 - r^2}}\left(2r\left(a^2 - r^2\right) - r^3\right) = \frac{\pi\left(2ra^2 - 3r^3\right)}{3\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Studio della disequazione $r\left(2a^2 - 3r^2\right) \ge 0$.

Poiché con r = 0 certamente il volume del cono è zero, che non può rappresentare il valore massimo ottenibile, possiamo ritenere r>0 e dunque semplificare il fattore r; rimane da studiare la disequazione di secondo grado

$2a^2 - 3r^2 \ge 0$, che limitatamente al dominio della funzione è soddisfatta per $0 \le r \le a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Deduciamo che la funzione volume è strettamente crescente nell'intervallo $\left]0; a\frac{\sqrt{6}}{3}\right[$, è strettamente decrescente nell'intervallo $\left]a\frac{\sqrt{6}}{3}; a\right[$ e per $r = a\frac{\sqrt{6}}{3}$ assume il suo massimo che vale

$$V_{\max} = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{a^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2}{3}a^2\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = \frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}$$

Calcolo della capacità del serbatoio in litri

$$Capacità = V_{\max} = \frac{2\pi(80cm)^3}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi \cdot 8^3 \cdot 10^3 cm^3}{9\sqrt{3}} \approx 206,36dm^3$$

Ricordato che un dm^3 rappresenta un litro si conclude che la capacità del serbatoio è circa 206,36*l*.

* * * * *

6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{cosx}$

Soluzione

La funzione è periodica ed ha come dominio l'unione degli intervalli in cui la funzione cosx è non negativa:

$$\cos x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in Z} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

Il dominio della funzione considerata è $A = \bigcup_{k \in Z} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$.