PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole di equazioni: $y^2=2x$ e $x^2=y$.

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.

b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

c) Sia **D** la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta *r*, parallela all'asse *x*, che stacca su **D** il segmento di lunghezza massima.

d) Si consideri il solido **W** ottenuto dalla rotazione di **D** intorno all'asse *x*. Se si taglia **W** con piani ortogonali all'asse *x*, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di **W**.

Soluzione

a) Poniamo $\lambda_1 : y^2 = 2x$, $\lambda_2 : y = x^2$.

Entrambe le parabole hanno il vertice nell'origine degli assi; λ_1 ha come asse di simmetria l'asse delle ascisse, λ_2 ha come asse di simmetria l'asse delle ordinate. La parabola λ_1 ha equazione del tipo $x = ay^2$, la sua retta direttrice ha equazione $x = -\frac{1}{4a}$, dunque è la retta

$d_1 : x = -\frac{1}{2}$.

La parabola λ_2 ha equazione del tipo $y = ax^2$,

la sua retta direttrice ha equazione $y = -\frac{1}{4a}$,

dunque è la retta $d_2 : y = -\frac{1}{4}$.

Il fuoco di λ_1 è il punto

$F_1\left(\frac{1}{4a};0\right) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{2};0\right)$;

il fuoco di λ_2 è il punto

$F_2\left(0;\frac{1}{4a}\right) \rightarrow F_2\left(0;\frac{1}{4}\right)$

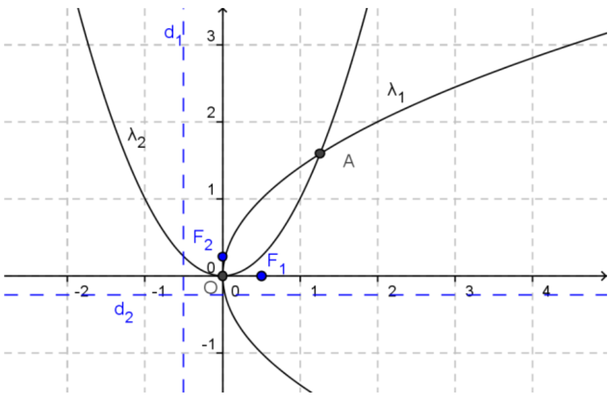

Figura 1

Le due parabole hanno in comune due punti, uno è l'origine degli assi; per trovare le coordinate del secondo punto (A) si deve risolvere il sistema composto dalle equazioni delle due curve.

$$\begin{cases} \lambda_1 : y^2 = 2x \\ \lambda_2 : y = x^2 \end{cases}$$

Si ottiene come equazione risolvente $x\left(x^3-2\right)=0$ le cui radici sono $x_1=0$, $x_2=\sqrt[3]{2}$. Il punto A richiesto è $A\left(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}\right)$.

Le due parabole e gli elementi geometrici richiesti sono riportati in **Figura 1**.

* * * * * * *

b) Il problema classico cui fa riferimento l'autore del testo, ispirato dal valore numerico $\sqrt[3]{2}$, è quello della **duplicazione del cubo**. Di cosa si tratta?

Considerato il cubo il cui spigolo misura l_1, è noto che il volume misura $V_1 = l_1^3$. Qual è la misura dello spigolo del cubo avente volume doppio del precedente?
Soluzione- Indicata con l_2 la misura dello spigolo del secondo cubo e V_2 il valore del relativo volume, quindi $V_2 = l_2^3$, dovendo risultare $V_2 = 2V_1$, deve sussistere l'uguaglianza $l_2^3 = 2l_1^3$ e quindi deve essere $l_2 = l_1 \cdot \sqrt[3]{2}$, cioè $\sqrt[3]{2}$ rappresenta la misura relativa dello spigolo del secondo cubo rispetto allo spigolo del primo cubo.
Precisiamo che a partire da un segmento di misura l non si riesce a costruirne uno di misura $l \cdot \sqrt[3]{2}$ operando con gli strumenti riga, squadra e compasso(1).

Calcolo di un valore approssimato di $\sqrt[3]{2}$ con errore inferiore a 10^{-2}.
Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 2$.
Osserviamo che:

1) la funzione, essendo un polinomio, è definita su tutto R, è **continua** e dotata di derivata di qualsiasi ordine. La funzione derivata prima è $f'(x) = 3x^2$, che si annulla solo per x=0 ed è positiva in ogni altro punto; il segno di $f'(x)$ implica che la funzione f è strettamente crescente nel suo dominio.
2) Limitatamente all'intervallo [1;2] risulta $f(1)=-1<0$, $f(2)=6>0$, pertanto, dal teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue definite in un intervallo chiuso, deduciamo che la funzione f internamente all'intervallo in esame si deve annullare almeno una volta; d'altra parte, dall'essere la derivata prima diversa da zero in]1;2[, si deduce(2) che lo zero della funzione nell'intervallo è unico. Sia $x=\alpha$ tale punto: $f(\alpha)=0$. Occorre determinare l'approssimazione richiesta di α.
3) Per determinare un'approssimazione adeguata per α si potrebbe applicare il metodo di bisezione, detto anche dicotomico, concettualmente semplice ed operativamente comodo da eseguire, controllando via via l'ampiezza dell'intervallo contenente lo zero ricercato ai fini del rispetto del margine di errore (che deve essere inferiore a

---

(1) Il problema della duplicazione del cubo è noto nella letteratura come il problema di Delo. Gli abitanti di Delo, per ingraziarsi gli Dei, volevano costruire un altare che avesse volume doppio di un altare esistente e simile a quello; matematicamente si trattava di ingrandire le dimensioni dell'altare esistente del fattore $\sqrt[3]{2}$. Infatti, considerati due punti qualsiasi P_1, P_2 del primo altare, e detti P'_1, P'_2 i corrispondenti punti nel nuovo altare, il volume di quest'ultimo è doppio del volume del primo se e solo se tra le misure dei segmenti P_1P_2, $P'_1P'_2$ è soddisfatta la relazione $\overline{P'_1P'_2} = \sqrt[3]{2} \cdot \overline{P_1P_2}$.
Riferimento storico (Carl B. Boyer- Storia della matematica- Oscar Mondadori- pag.80)
Tra i problemi di cui si occupavano i geometri greci del V secolo a.C. c'era il seguente.

Fissati due segmenti di misure a e b, determinare le misure x, y di altri due segmenti che con i precedenti formano la catena di rapporti a:x=x:y=y:b.

Sembra che Ippocrate di Chio (che visse ed operò ad Atene intorno al 430 a.C.) abbia intuito che la risoluzione del problema geometrico indicato fosse equivalente a quello della duplicazione del cubo. Infatti, se $b=2a$, confrontando le proporzioni continue indicate, una volta eliminata y, si ottiene la relazione $x^3 = 2a^3$ da cui $x = \sqrt[3]{2}a$; dunque x è la misura dello spigolo del cubo avente volume doppio del cubo il cui spigolo misura a.
Dimostrazione. Dalla catena di rapporti $a : x = x : y = y : 2a$, nella quale ogni termine è ovviamente diverso da zero, segue $\left(x^2 = ay\right) \wedge \left(y^2 = 2ax\right) \to \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \to x^4 = 2a^3x \to x^3 = 2a^3 \to x = \sqrt[3]{2}a$

(2) L'unicità dello zero della funzione internamente all'intervallo [1;2] può essere dedotta dalla stretta crescenza della funzione nel suo dominio, oppure osservando che se ammettesse almeno due zeri interni all'intervallo, detti questi x_1, x_2, nell'intervallo $[x_1; x_2]$ la funzione verificherebbe le ipotesi del teorema di Rolle e dunque esisterebbe un punto c, con $x_1<c<x_2$, in cui si annullerebbe la derivata prima: $f'(c)=0$ e ciò non è possibile perché per ipotesi $f'(x)\neq 0$ nell'intervallo]1;2[. Dunque la funzione ammette un solo zero internamente a $[x_1; x_2]$.

0,01). Nella risoluzione di analoghi quesiti delle prove di matematica assegnate nell'Esame di Stato negli anni precedenti[(3)] abbiamo spesso utilizzato il metodo dicotomico. In quest'occasione ricorrono le condizioni per applicare il metodo delle tangenti (metodo di Newton- Fourier[(4)]) e quello delle secanti. L'applicazione congiunta dei due metodi permette di apprezzare meglio l'entità dell'errore di cui sono affetti i valori approssimati di α che si ricavano. Di seguito applichiamo il metodo delle tangenti.

4) Precisazione sull'applicabilità del metodo delle tangenti e delle secanti.
   La funzione in esame nell'intervallo [1;2] deve:
   - essere continua insieme alle sue derivate dei primi due ordini;
   - assumere agli estremi dell'intervallo segno diverso: $f(1)\cdot f(2)<0$,
   - la derivata seconda nell'intervallo aperto [1;2] mantenga lo stesso segno (quindi sia positiva o negativa in ogni punto)[(5)].

Con le condizioni indicate **la funzione ammette all'interno dell'intervallo un unico zero**. Nel nostro caso le condizioni si verificano tutte: della continuità e derivabilità della funzione e del segno assunto dalla stessa agli estremi dell'intervallo si è discusso nei precedenti punti 1) e 2); per la derivata seconda si ha $f''(x)=6x$ e $\forall x \in \left]1;2\right[$ risulta $f''(x)>0$ (la funzione è convessa).

Per l'applicabilità del metodo delle tangenti, come si precisa più oltre nell'Osservazione, è necessario che la derivata prima nel punto iniziale (estremo di Fourier) e nei punti dell'intervallo [1;2] sia anche diversa da zero.

Applicazione del metodo delle tangenti

Siano A(1;f(1))≡(1;-1), B(2;f(2)) ≡(2;6) gli estremi dell'arco del diagramma della funzione corrispondente all'intervallo [1;2].
Il metodo delle tangenti prevede l'impostazione delle seguenti azioni:

1. Scegliere come punto iniziale $(x_0; f(x_0))$ (estremo di Fourier) quello fra i due estremi A e B in cui la funzione assume segno concorde a quello assunto dalla derivata seconda nell'intervallo. Nel nostro caso, essendo $f''(x)>0$ ed $f(2)>0$, il punto iniziale è B(2;f(2)).
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto iniziale B(2;f(2)). Questa retta taglia l'asse delle ascisse nel punto $x=x_1$. Date le caratteristiche della specifica funzione risulterà $x_1>\alpha$; x_1 è una prima approssimazione dello zero cercato.
3. Considerare il punto $P_1(x_1;f(x_1))$ e ripetere le operazioni descritte nel precedente punto con P_1 in luogo di B. Quindi:
   a. scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto P_1;
   b. trovare il punto di intersezione di detta retta con l'asse delle ascisse, sia x_2 tale punto; risulterà $x_1>x_2>\alpha$. Considerare il punto $P_2(x_2;f(x_2))$ e ripetere le operazioni indicate nel punto 2.

Con l'algoritmo indicato si genera la successione di punti

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

(3) Confrontare il mio lavoro:soluzione e commento della Prova di matematica nei corsi sperimentali PNI del Liceo Scientifico, sessione ordinaria giugno 2006, pubblicazione 30 aprile 2007; risoluzione del Quesito_4 del questionario, pag.35..38.
(4) Joseph Fourier (1786-1830), matematico francese, ha perfezionato il metodo delle tangenti ideato da Isaac Newton e per questo motivo **l'stremo iniziale** con cui si avvia la ricerca dello zero **è detto estremo di Fourier**.
5 Confrontare anche il mio lavoro: *Metodi numerici sulla risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo e trascendenti*, del 1991, da pagina 5 a pagina 15.

che risulta strettamente decrescente (per la funzione in esame) ed i valori sono tutti approssimazioni per eccesso dello zero cercato:

$$x_0 > x_1 > x_2 > ... > x_n > \alpha$$

Si dimostra che la successione generata converge(6) proprio al punto che è lo zero cercato. Dal punto di vista operativo il processo viene iterato finché l'ultimo valore trovato x_n non possiede la proprietà richiesta, cioè non risulta affetto da errore inferiore al margine prestabilito; nel nostro caso l'errore deve essere inferiore a 0,01. E' importante dunque controllare la qualità dei valori numerici ottenuti. Nel caso specifico si osservano le cifre decimali e quando si noterà la stabilizzazione della seconda cifra decimale si potrà arrestare il processo.

Esecuzione del metodo delle tangenti

Equazione della retta tangente nel punto $(x_0; f(x_0))$: $t_0 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, con $x_0 = 2$.

Ascissa del punto di intersezione della retta tangente t_0 con l'asse x: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Nell'iterazione del processo si otterranno i diversi punti con la formula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (*)$$

Osservazione

Ferme restando le condizioni che assicurano l'esistenza e l'unicità dello zero della funzione internamente all'intervallo di ricerca [1;2], la struttura della formula iterativa (*) indica chiaramente che per l'applicabilità del metodo delle tangenti la derivata prima della funzione deve essere diversa da zero nell'estremo iniziale e nei punti interni all'intervallo di ricerca.

A lato sono riportate le elaborazioni eseguite con il foglio elettronico Excel in cui sono state implementate le funzioni necessarie. Si osserva che l'approssimazione x_4=1,25992.. è il primo valore affetto da errore inferiore a 0,01; infatti a partire da detto punto in poi sono stabili le prime due cifre decimali. Possiamo perciò concludere che α=1,25.
Per aprire il foglio elettronico clicca qui

N	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	2,00000000	6,00000000	12,00000000	1,50000000
1	1,50000000	1,37500000	6,75000000	1,29629630
2	1,29629630	0,17827567	5,04115226	1,26093222
3	1,26093222	0,00481929	4,76985023	1,25992186
4	1,25992186	0,00000386	4,76220928	1,25992105
5	1,25992105	0,00000000	4,76220316	1,25992105
6	1,25992105	0,00000000	4,76220316	1,25992105

Costruzione della curva di equazione $y = x^3 - 2$ e di alcune rette tangenti con punto iniziale B(2;f(2))

1. Punto B(2;6)
2. Equazione della tangente in B$\rightarrow t_B : y = 12x - 18$
3. Ascissa del punto di intersezione della tangente in B con l'asse $x \rightarrow x_1 = 1,5$
4. Equazione della tangente nel punto $P_1(x_1; f(x_1)) \rightarrow P_1(1,5;1,38)$

   $t_1 : y = 6,75x - 8,75$
5. Ascissa del punto di intersezione della tangente in P_1 con l'asse $x \rightarrow x_2 \approx 1,296$
6. …

Le elaborazioni grafiche sono riportate in **Figura 2**.
Il punto C_1 ha ascissa x_1, il punto C_2 ha ascissa x_2.
Per aprire il file realizzato con GeoGebra clicca qui.

(6) Vedere la precedente nota n.5

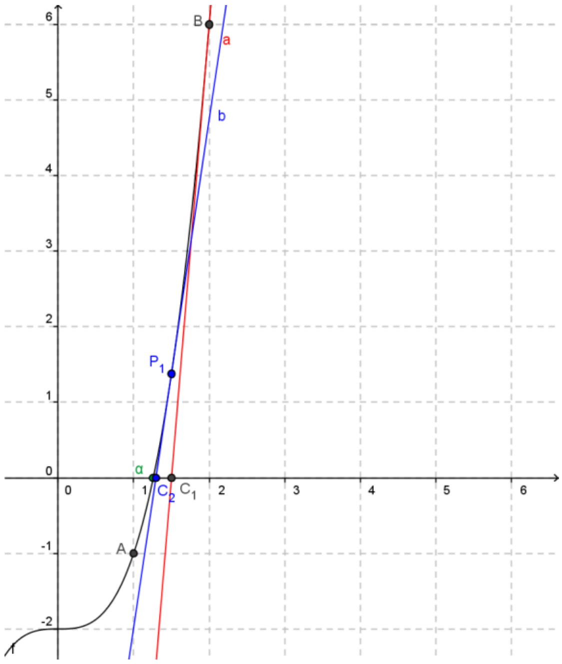

Figura 2

* * * * * * *

c) Consideriamo la generica retta *r* parallela all'asse delle ascisse che interseca la regione piana **D**; essa ha equazione y=k, con $0 \le k \le y_A$. Si devono determinare i due punti P, Q in cui *r* interseca i due archi delle parabole; risolvendo i sistemi formati dalle rispettive equazioni si ricavano le coordinate.

$$P \equiv r \cap \lambda_1 \to P\left(\frac{k^2}{2};k\right)$$

$$Q \equiv r \cap \lambda_2 \to Q\left(\sqrt{k};k\right)$$

Osserviamo che l'ascissa di Q è maggiore o uguale all'ascissa di P e dunque la misura del segmento PQ è

$$\overline{PQ} = x_Q - x_P = \sqrt{k} - \frac{k^2}{2} = l(k)$$ (vedere la **Figura 3**)

Si risolve il quesito proposto determinando il **massimo assoluto della funzione** $l(k)$, con k variabile nell'intervallo chiuso $\left[0;\sqrt[3]{4}\right]$.

Osserviamo che la funzione $l(k)$ è continua e poiché la studiamo relativamente ad un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, ammette certamente il valore massimo.

Per la ricerca del massimo studiamo il segno della derivata prima.

$$l'(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k = \frac{1-2k\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} \ge 0$$

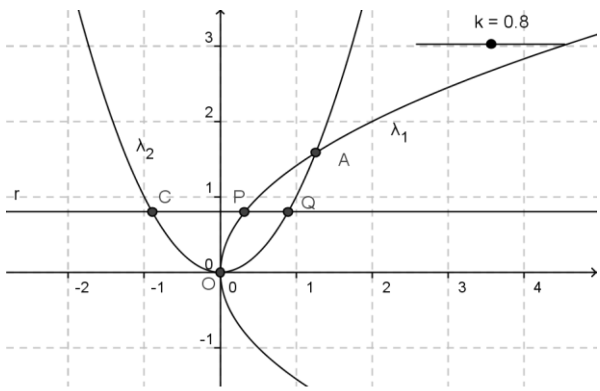

Figura 3

Basta studiare la disequazione $1-2k\sqrt{k}\geq 0 \to k^{\frac{3}{2}}\leq\frac{1}{2}\to k\leq\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

La funzione derivata prima è positiva nell'intervallo $\left]0;\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right[$, negativa nell'intervallo $\left]\frac{1}{\sqrt[3]{4}};\sqrt[3]{4}\right[$ e quindi la funzione $l(k)$ è strettamente crescente nel primo intervallo, strettamente decrescente nel secondo intervallo ed il punto $k=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ è di massimo relativo ma anche assoluto per la stessa. La retta r richiesta è: $y=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Il valore del massimo della funzione, cioè la misura massima del segmento PQ è

$$l_{\max}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{2}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{8}\approx 0,595275$$

Laboratorio con GeoGebra

Si può lanciare l'applicazione GeoGebra e e aprire il relativo file per osservare come varia la misura del segmento PQ.(Clicca qui).

Trascinando lo **slider** si può far scorrere la retta *r* parallelamente all'asse *x* fino a farle assumere la posizione prossima alla posizione corrispondente alla lunghezza massima del segmento PQ. La **Figura 4** è un esempio di ciò che l'operatore può ottenere sperimentando. L'immagine riprodotta indica approssimativamente in quale posizione della retta *r* il segmento PQ ha lunghezza massima.

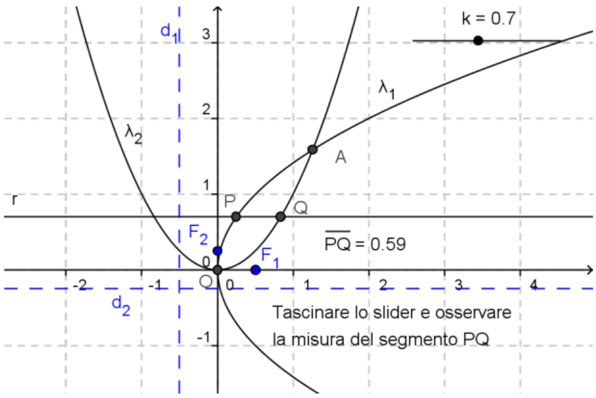

Figura 4

* * * * * * *

d) Le **sezioni di W** con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono delle **corone circolari**. Infatti, detto π uno dei piani ortogonali all'asse *x* che taglia il solido W ed s la retta di intersezione di π con il piano cartesiano contenente le parabole λ_1, λ_2, la sezione di π con W è la superficie descritta dal segmento formato dall'intersezione della retta s con la regione D nella rotazione completa intorno all'asse *x*.

Calcolo del volume del solido W

Il volume di W si ottiene come differenza tra il volume W_1 del solido descritto nella rotazione completa attorno all'asse *x* dal sottografico della funzione $y=\sqrt{2x}$ relativamente all'intervallo $\left[0;\sqrt[3]{2}\right]$ ed il volume W_2 del solido descritto nella stessa rotazione dal sottografico della funzione $y=x^2$, sempre relativamente allo stesso intervallo $\left[0;\sqrt[3]{2}\right]$. Si ha:

$$W = W_1 - W_2 = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx - \int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi\left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt[3]{2}} \left(2x - x^4\right) dx = \pi\left[x^2 - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$\pi\left(\sqrt[3]{4} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{4}\right) = \frac{3\pi}{5}\sqrt[3]{4}$$

Commento

Il problema permette di verificare con il **quesito a)** se il candidato possiede le conoscenze di base relative alla geometria analitica nel piano cartesiano (limitatamente alla retta ed alla parabola) studiata nel corso del terzo liceo, nonché di saggiare le abilità nel risolvere equazioni e sistemi di equazioni di grado superiore al primo.

Il **quesito b)**, nella prima parte permette di verificare se il candidato è a conoscenza del problema della duplicazione del cubo (non credo che lo stesso dovesse evidenziare la sussistenza del cosiddetto <<problema di Delo>>); la seconda parte dello stesso quesito mira a stabilire se il candidato sa gestire un metodo iterativo per la ricerca del valore approssimato di $\sqrt[3]{2}$, utilizzando evidentemente un'opportuna funzione. La risoluzione completa di questa parte del quesito richiede anche che il candidato richiami il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua definita in un intervallo chiuso [a;b], nonché le condizioni che assicurano l'univocità dello zero della funzione scelta con la quale implementare l'algoritmo risolutivo. La risoluzione corretta e completa di questo quesito richiede che il candidato possieda conoscenze e competenze di analisi matematica piuttosto avanzate e che sappia impostare e gestire un algoritmo iterativo di calcolo. Dal punto di vista concettuale ritengo che questa sia la parte più impegnativa della risoluzione del problema.

Il **quesito c)** permette di accertare se il candidato sa impostare la risoluzione di un problema di massimo e, applicando le conoscenze e le competenze acquisite sul calcolo differenziale, individuare le risposte attese. La funzione di cui trovare il massimo è un'irrazionale intera e si dovrebbe riconoscere a priori che la stessa ammette effettivamente il massimo per il teorema di Weierstrass (funzione continua definita in un intervallo chiuso). La ricerca del punto di massimo e del valore massimo comporta calcoli piuttosto semplici, nonostante la presenza di radicali quadratici e cubici.

Il **quesito d)** è destinato da un lato a verificare la capacità del candidato ad orientarsi con figure dello spazio tridimensionale, dall'altro ad accertare il possesso delle conoscenze e delle competenze necessarie sul calcolo integrale con cui operare per calcolare il volume del solido di rotazione. E' bene osservare che per determinare il valore del suddetto volume il candidato può aver tratto un'indicazione operativa dal testo rispondendo correttamente alla domanda "….quale forma hanno le sezioni ottenute?" Se si indica con S(*x*) l'area della corona circolare sezione ottenuta tra il solido W ed il generico piano π ortogonale all'asse *x*, il valore del volume si ottiene con l'integrale definito $\int_0^{\sqrt[3]{2}} S(x)dx$.

Conclusione

Nel complesso il problema è ben articolato e ad un candidato che lo abbia risolto correttamente e completamente potrebbe essere riconosciuta una valutazione superiore alla sufficienza (11-12 punti su 15).